4.3.7 Cookova věta. Úloha SAT, splňování formulí v konjunktivním normálním tvaru, je $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

4.3.8 Důkaz. Není těžké se přesvědčit, že úloha SAT je ve třídě $\mathcal{NP}$. První fáze nedeterministického algoritmu vygeneruje ohodnocení logických proměnných a na základě tohoto ohodnocení jsme schopni v polynomiálním čase ověřit, zda je v tomto ohodnocení formule pravdivá nebo ne.

V druhé části důkazu ukážeme, že každá $\mathcal{NP}$ úloha se polynomiálně redukuje na problém SAT. Pro každý $\mathcal{NP}$ problém $\mathcal{U}$ existuje nedeterministický Turingův stroj M, který přijímá jazyk této úlohy $L_{\mathcal{U}}$ v polynomiálním čase. To znamená, že pro každé slovo w délky n nad danou abecedou se M zastaví po maximálně $p(n)$ krocích, a to buď v koncovém stavu, jestliže $w \in L_{\mathcal{U}}$, nebo v nekoncovém stavu, jestliže $w \notin L_{\mathcal{U}}$.

Proto stačí pro každý nedeterministický Turingův stroj M a dané slovo w zkonstruovat formuli $\varphi_{M,w}$ v CNF takovou, že

$$w \in L(M) \quad \text{právě tehdy, když } \varphi_{M,w} \text{ je splnitelná}$$

Je dán nedeterministický Turingův stroj M s množinou stavů Q, vstupní abecedou Σ, páskovou abecedou Γ, přechodovou funkcí δ, počátečním stavem q_0 a koncovým stavem q_f. Předpokládejme, že M přijímá slovo w a potřebuje přitom $p(n)$ kroků.

Zavedeme logické proměnné:

- $h_{i,j}$, $i = 0, 1, \ldots, p(n)$, $j = 1, 2, \ldots, p(n)$; fakt, že hodnota proměnné $h_{i,j}$ je rovna 1 znamená, že hlava Turingova stroje v čase i čte j-té pole pásky.

- s_i^q, $i = 0, 1, \ldots, p(n)$, $q \in Q$; fakt, že hodnota proměnné s_i^q je rovna 1 znamená, že Turingův stroj v čase i je ve stavu q.
- $t_{i,j}^A$, $i = 0, 1, \ldots, p(n)$, $j = 1, 2, \ldots, p(n)$, $A \in \Gamma$; fakt, že hodnota proměnné $t_{i,j}^A$ rovna 1 znamená, že v čase i v j-tém poli pásky je páskový symbol A.

Nyní je třeba formulemi popsat následující fakta:

1. V každém okamžiku je Turingův stroj v právě jednom stavu.
2. V každém okamžiku čte hlava Turingova stroje právě jedno pole vstupní pásky.
3. V každém okamžiku je na každém poli pásky Turingova stroje právě jeden páskový symbol.
4. Na začátku práce (tj. v čase 0) je Turingův stroj ve stavu q_0, hlava čte první pole pásky a na pásce je na prvních n polích vstupní slovo, ostatní pole pásky obsahují B.
5. Krok Turingova stroje je určen přechodovou funkcí, tj. stav stroje, obsah čteného pole a poloha hlavy v čase $i+1$ je dána přechodovou funkcí.
6. V polích pásky, které v čase i hlava nečte, je obsah v čase $i+1$ stejný jako v i.
7. Jestliže se M dostane v čase i do koncového stavu, pak i v čase $i+1$ v koncovém stavu zůstane.

8. Na konci práce Turingova stroje, tj. v čase $p(n)$, je stroj ve stavu q_f.

Ukážeme jak utvořit formule pro jednotlivé body

Bod 1. V okamžiku i je Turingův stroj v aspoň jednom stavu:

$$\bigvee_{q \in Q} s_i^q.$$

V okamžiku i Turingův stroj není ve dvou různých stavech:

$$\bigwedge_{q \neq q'} (\neg s_i^q \vee \neg s_i^{q'}).$$

Nyní fakt, že Turingův stroj je v okamžiku i v právě jednom stavu je konjunkce obou výše uvedených formulí:

$$\varphi_1^i = (\bigvee_{q \in Q} s_i^q) \wedge \bigwedge_{q \neq q'} (\neg s_i^q \vee \neg s_i^{q'}).$$

Formule $\varphi_1 = \bigwedge_i \Big((\bigvee_{q \in Q} s_i^q) \wedge \bigwedge_{q \neq q'} (\neg s_i^q \vee \neg s_i^{q'}) \Big)$.

Bod 2. V okamžiku i čte hlava Turingova stroje aspoň jedno pole pásky:

$$\bigvee_{1 \leq j \leq p(n)} h_{i,j}.$$

V okamžiku i nečte hlava Turingova stroje dvě různá pole:

$$\bigwedge_{j \neq k} (\neg h_{i,j} \vee \neg h_{i,k}).$$

Nyní fakt, že hlava Turingova stroje v okamžiku i čte přesně jedno pole pásky je konjunkce obou výše uvedených formulí:

$$\varphi_2^i = (\bigvee_{1 \leq j \leq p(n)} h_{i,j}) \wedge \bigwedge_{j \neq k} (\neg h_{i,j} \vee \neg h_{i,k}).$$

Formule $\varphi_2 = \bigwedge_i \Big((\bigvee_{1 \leq j \leq p(n)} h_{i,j}) \wedge \bigwedge_{j \neq k} (\neg h_{i,j} \vee \neg h_{i,k}) \Big)$.

Bod 3. V okamžiku i je v j-tém poli pásky Turingova stroje aspoň jeden páskový symbol:

$$\bigvee_{A \in \Gamma} t_{i,j}^A.$$

V okamžiku i v j-tém poli pásky Turingova stroje nejsou dva různé páskové symboly:

$$\bigwedge_{A \neq A'} (\neg t_{i,j}^A \vee \neg t_{i,j}^{A'}).$$

Nyní fakt, že Turingův stroj má v okamžiku i v j-tém poli právě jeden páskový symbol je konjunkce obou výše uvedených formulí:

$$\varphi_3^{i,j} = (\bigvee_{A \in \Gamma} t_{i,j}^A) \wedge \bigwedge_{A \neq A'} (\neg t_{i,j}^A \vee \neg t_{i,j}^{A'}).$$

Formule $\varphi_3 = \bigwedge_i \bigwedge_j \Big((\bigvee_{A\in\Gamma} t^A_{i,j}) \wedge \bigwedge_{A\neq A'} (\neg t^A_{i,j} \vee \neg t^{A'}_{i,j}) \Big)$.

Bod 4. Na začátku práce (tj. v čase 0) je Turingův stroj ve stavu q_0, hlava čte první pole pásky a na pásce je na prvních n polích vstupní slovo $a_1 a_2 \dots a_n$, ostatní pole obsahují B.

$$\varphi_4 = s_0^{q_0} \wedge h_{0,1} \wedge t^{a_1}_{0,1} \wedge \dots \wedge t^{a_n}_{0,n} \wedge t^B_{0,n+1} \wedge \dots \wedge t^B_{0,p(n)}.$$

Bod 5. Jestliže Turingův stroj je v čase i ve stavu q, hlava je na j-tém poli pásky, hlava čte páskový symbol A a $\delta(q,A)$ se skládá z trojic (p,C,D) (zde $D=1$ znamená posun hlavy doprava, $D=-1$ znamená posun hlavy doleva), pak formule má tvar:

$$\bigwedge_j \bigwedge_{A\in\Gamma} \big((s_i^q \wedge h_{i,j} \wedge t^A_{i,j}) \Rightarrow \bigvee (s^p_{i+1} \wedge t^C_{i+1,j} \wedge h_{i+1,j+D})\big).$$

Formule φ_5 je konjungce všech výše uvedených formulí pro všechny i, $i < p(n)$, j, $1 \leq j \leq p(n)$, $q \in Q$ a $A \in \Gamma$.

Bod 6. Obsah polí, které hlava nečte, zůstává v čase $i+1$ stejný:

$$\bigwedge_j \bigwedge_{A\in\Gamma} \big((\neg h_{i,j} \wedge t^A_{i,j}) \Rightarrow t^A_{i+1,j}\big).$$

Formule φ_6 je konjungce všech výše uvedených formulí pro všechny i, $i < p(n)$, j, $1 \leq j \leq p(n)$, a $A \in \Gamma$.

Bod 7. Jestliže se stroj dostane do koncového stavu, už v něm zůstává.

$$s_i^{g_f} \Rightarrow s_{i+1}^{q_f}, \quad g_f \in F.$$

Formule φ_7 je konjunkce všech výše uvedených formulí pro všechna i, $i < p(n)$.

Bod 8. Na konci práce Turingova stroje, tj. v čase $p(n)$ je stroj ve stavu q_f.

$$\varphi_8 = s^{q_f}_{p(n)}.$$

Výslednou formuli dostaneme jako konjunkci formulí

$$\varphi_{M,w} = \bigwedge_{k=1}^{8} \varphi_k.$$

4.4 Převody úloh

4.4.1 Metoda Ukázat, že rozhodovací úloha $\mathcal{V}$ je $\mathcal{NP}$ úplná, je potřeba a stačí

1. ověřit, že $\mathcal{V} \in \mathcal{NP}$;
2. najít $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu $\mathcal{U}$, pro kterou

$$\mathcal{U} \lhd_p \mathcal{V}.$$

Zatím jediná $\mathcal{NP}$ úplná úloha, kterou známe, je SAT, splňování booleovských formulí v konjunktivním normálním tvaru. Ukážeme řadu polynomiálních redukcí a tím ukážeme, že i další rozhodovací úlohy jsou $\mathcal{NP}$ úplné.

4.4.2 $3 - CNF\ SAT$**.** *Úloha:* Je dána formule φ v konjunktivním normálním tvaru, kde každá klauzule má maximáoně 3 literály.
Otázka: Je formule φ splnitelná?

4.4.3 Tvrzení. Platí

$$SAT \lhd_p 3 - CNF\,SAT.$$

4.4.4 Nástin převodu SAT na $3 - CNF\ SAT$. Je dána formule φ v konjunktivním normálním tvaru. Zkonstruujeme formuli ψ, která

1. je v konjunktivním normálním tvaru, kde každá klauzule obsahuje maximálně 3 literály;
2. je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná formule φ.

Označme $C_1, C_2, \dots, C_k$ všechny klauzule formule φ. Jestliže každá z klauzulí obsahuje nejvýše 3 literály, nemusíme nic konstruovat, v tomto případě je $\psi = \varphi$.

Pro každou klauzuli C_i, která obsahuje víc než 3 literály, sestrojíme formuli ψ_{C_i} takto: Nechť $C_i = l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_s$, kde l_j jsou literály. Zavedeme nové logické proměnné $x_1, x_2, \dots, x_{s-3}$ a položíme

$$\psi_{C_i} = (l_1 \vee l_2 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee l_3 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee l_4 \vee x_3) \wedge \dots \wedge (\neg x_{s-3} \vee l_{s-1} \vee l_s).$$

Platí: Formule ψ_{C_i} je splnitelná právě tehdy, když C_i je splnitelná.

Formuli ψ dostaneme jako konjunkci všech klauzulí formule φ, které mají nejvýše 3 literály a formulí ψ_{C_i} pro klauzule C_i o více než 3 literálech.

Předpokládejme, že formule φ má k klauzulí a nejdelší klauzule má s literálů. Pak v konstrukci ψ jsme přidali maximálně $(s-3)k$ nových logických proměnných (rovnost nastává v případě, že každá z klauzulí formule φ obsahuje přesně $s > 3$ literálů). Navíc jsme formuli prodloužili o maximálně o $2(s-3)k$ literálů (každá nová logická proměnná se ve formuli ψ objevuje přesně dvakrát). Tedy délka formule ψ se pouze polynomiálně zvětšila vzhledem k délce formule φ.

4.4.5 Důsledek. Protože úloha $3 - CNF\ SAT$ je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

4.4.6 Obarvení vrcholů grafu. Je dán prostý neorientovaný graf bez smyček $G = (V, E)$. *Obarvení vrcholů* grafu G je přiřazení, které každému vrcholu v grafu G přiřazuje jeho barvu $b(v)$, $b(v)$ je prvek množiny (barev) B, pro které platí, že žádné dva vrcholy spojené hranou nemají stejnou barvu. (Jinými slovy, jestliže $\{u, v\}$ je hrana grafu G, pak $b(u) \neq b(v)$.)

Graf G se nazývá *k-barevný*, jestliže jeho vrcholy je možné obarvit k barvami (tj. množina B má k prvků).

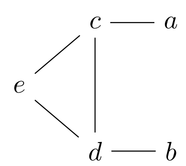
4.4.7 3-barevnost.
Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf G bez smyček.
Otázka: Je graf G 3-barevný?

4.4.8 Tvrzení. Platí

$$3 - CNF\ SAT \lhd_p \text{3-barevnost}.$$

4.4.9 Základní myšlenka převodu. Je dána formule φ, která je v CNF a každá klauzule má 2 nebo 3 literály. K důkazu je třeba zkonstruovat prostý neorientovaný graf G bez smyček takový, že φ je splnitelná právě tehdy, když G je 3-barevný.

Konstrukce využívá pomocný graf G_1 o pěti vrcholech $\{a, b, c, d, e\}$ a pěti hranách



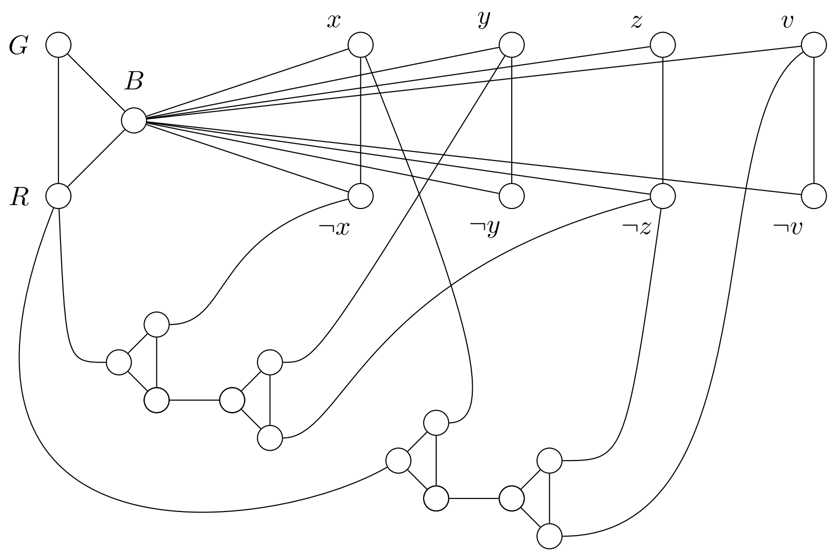
s těmito vlastnostmi:

- Jestliže vrcholy a a b mají stejnou barvu, pak tuto barvu musí mít i vrchol e.
- Jestliže jeden z vrcholů a a b má barvu z, pak lze tento graf obarvit tak, aby i vrchol e měl barvu z.

Mějme formuli φ, označme x_1, x_2, …, x_n všechny logické proměnné, které se ve formuli φ vyskytují. Vytvoříme neorientovaný graf $G = (V, E)$, kde

- V obsahuje všechny literály, tj. $x_1, \neg x_1, \ldots, x_n, \neg x_n$, vrcholy R, G, B.
- E obsahuje hrany tak, že R, G, B a $B, x_i, \neg x_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ tvoří trojúhelník.
- Pro každou klauzuli obsahující literály l_1, l_2, l_3 přidáme do grafu dvě kopie pomocného grafu G_1 a to takto: Literály l_2 a l_3 odpovídají vrcholům a a b první kopie pomocného grafu G_1, vrcholy l_1 a e odpovídají vrcholům a, b druhého grafu G_1, a vrchol R je spojen haranou s vrcholem e druhé kopii grafu G_1.

Příklad grafu G pro dvě klauzule $C_1 = \neg z \vee y \vee \neg x$ a $C_2 = t \vee \neg z \vee x$ (x, y, z, t jsou logické proměnné) je na následujícím obrázku.



Předpokládejme, že formule φ je splnitelná; máme tedy pravdivostní ohodnocení, ve kterém je φ pravdivá. Obarvíme graf G třemi barvami z (zelená), c (červená) a m (modrá) takto:

- Vrcholy R, G, B: $b(R) = c$, $b(G) = z$, $b(B) = m$.
- Vrchol odpovídající literálu l má barvu z právě tehdy, když je l pravdivý, v opačném případě jej obarvíme c.

Protože každá klauzule obsahuje alespoň jeden literál, který je pravdivý, tj. jeho vrchol je obarven barvou z, je možné obarvit i zbývající vrcholy tak, aby G byl tříbarevný.

Předpokládejme, že graf G je tříbarevný. Přejmenujme barvy tak, aby platilo: $b(R) = c$, $b(G) = z$, $b(B) = m$. Nyní definujeme pravdivostní ohodnocení logických proměnných x_1, x_2, ..., x_n takto:

$$\text{proměnná } x_i \text{ je pravdivá iff } b(x_i) = z \text{ a}$$
$$\text{proměnná } x_i \text{ je nepravdivá iff } b(x_i) = c.$$

Z vlastností pomocného grafu G_1 vyplývá, že v každé klauzuli je alespoň jeden literál, který je obarven barvou z, tudíž je pravdivý.

Není těžké nahlédnout, že počet vrcholů i hran grafu G je polynomiální vůči délce formule φ.

4.4.10 Důsledek. Protože 3-barevnost je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

4.4.11 Tvrzení. Platí

$$\text{3-barevnost } \lhd_p \mathit{ILP}.$$

4.4.12 Převod 3-barevnosti na ILP. Je dán prostý neorientovaný graf bez smyček $G = (V, E)$. Zkonstruujeme instanci I úlohy celočíselného lineárního programování takovou, že I má přípustné řešení právě tehdy, když graf G je 3-barevný.

Všechny proměnné budou nabývat hodnot 0 nebo 1 (tj. bude se jednat o tzv. 0-1 celočíselné lineární programování).

Proměnné: Pro každý vrchol $v \in V$ zavedeme tři proměnné:

$$x_v^c, x_v^m, x_v^z.$$

Význam: Fakt, že proměnná x_v^b je rovna 1, $b \in \{c, m, z\}$, znamená, že vrchol v má barvu b.

Podmínky:

- Pro každý vrchol $v \in V$ máme rovnici, která zaručuje, že vrchol v má právě jednu barvu – buď c nebo m nebo z:

$$x_v^c + x_v^m + x_v^z = 1.$$

- Pro každou hranu $e = \{u, v\}$ máme tři nerovnosti (pro každou barvu jednu) zaručující, že oba vrcholy u a v nemohou mít stejnou barvu:

$$x_u^c + x_v^c \leq 1, \;\; x_u^m + x_v^m \leq 1, \;\; x_u^z + x_v^z \leq 1.$$

Platí: Graf G je 3-barevný právě tehdy, když I má přípustné řešení.

Instance I má $3\,|V|$ proměnných a $|V| + 3\,|E|$ podmínek. Jedná se tedy o instanci velikosti $\mathcal{O}(n + m)$, kde $n = |V|$ a $m = |E|$.

4.4.13 Důsledek. Protože ILP je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.