4.4.14 Problém rozkladu.
Úloha: Je dána konečná množina X a systém jejích podmnožin $\mathcal{S}$.

Otázka: Je možné z $\mathcal{S}$ vybrat prvky tak, že tvoří rozklad množiny X? Jinými slovy, existuje $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ tak, že $\mathcal{A}$ je rozklad množiny X?

4.4.15 Tvrzení. Platí

$$\text{3-barevnost} \ \lhd_p \ \text{problém rozkladu.}$$

4.4.16 Převod 3-barevnosti na problém rozkladu. Je dán neorientovaný prostý graf bez smyček $G = (V, E)$. Zkonstruujeme množinu X a systém jejích podmnožin $\mathcal{S}$ tak, že graf G je tříbarevný právě tehdy, když ze systému $\mathcal{S}$ lze vybrat rozklad množiny X.

Množina X:

- Pro každý vrchol $v \in V$ dáme do množiny X prvky

$$v, p_v^c, p_v^m, p_v^z.$$

- Pro každou hranu $e = \{u, v\}$ dáme do množiny X prvky

$$q_{uv}^c, q_{uv}^m, q_{uv}^z, q_{vu}^c, q_{vu}^m, q_{vu}^z.$$

Množina X má $4\,|V| + 6\,|E|$ prvků.

Systém podmnožin $\mathcal{S}$ tvoří tyto množiny:

1) Pro každý vrchol $v \in V$:

$$\{v, p_v^c\}, \{v, p_v^m\}, \{v, p_v^z\}.$$

2) Pro každý vrchol $v \in V$ označme $N(v)$ množinu všech sousedů vrcholu v (tj. $N(v) = \{u \mid \{u, v\} \in E\}$). Do $\mathcal{S}$ dáme množiny:

$$S_v^c = \{p_v^c, q_{vu}^c \mid u \in N(v)\}, S_v^m = \{p_v^m, q_{vu}^m \mid u \in N(v)\}, S_v^z = \{p_v^z, q_{vu}^z \mid u \in N(v)\}.$$

3) Pro každou hranu $e = \{u, v\}$ dáme do $\mathcal{S}$ množiny:

$$\{q_{uv}^c, q_{vu}^m\}, \{q_{uv}^c, q_{vu}^z\}, \{q_{uv}^m, q_{vu}^c\}, \{q_{uv}^m, q_{vu}^z\}, \{q_{uv}^z, q_{vu}^c\}, \{q_{uv}^z, q_{vu}^m\}.$$

Systém $\mathcal{S}$ má $3\,|V|$ množin z 1), $3\,|V|$ množin z 2) a $6\,|E|$ množin z 3).

a) Je-li graf G 3-barevný, je možné jeho vrcholy obarvit barvami $\{c, m, z\}$. Označme $b(v)$ barvu vrcholu $v \in V$. Z systému $\mathcal{S}$ vybereme $\mathcal{A}$ takto:

$\mathcal{A}$ se skládá z:

1) $\{v, p_v^{b(v)}\}$ pro všechny $v \in V$,

2) $S_v^{b_1}$ a $S_v^{b_2}$, kde b_1 a b_2 jsou zbylé dvě barvy, kterými není obarven v,

3) $\{q_{uv}^{b(u)}, q_{vu}^{b(v)}\}$ pro každou hranu $e = \{u, v\}$.

Uvědomte si, že protože b je obarvení, množiny ze 3) jsou v $\mathcal{S}$.

b) Jestliže existuje rozklad $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ množiny X, pak sestrojíme obarvení grafu G takto:

$$b(v) := b, b \in \{c, m, z\} \quad \text{právě tehdy, když} \quad \{v, p_v^b\} \in \mathcal{A}.$$

Není těžké dokázat, že z volby systému $\mathcal{S}$ a $\mathcal{A}$ vyplývá: b je obarvení vrcholů třemi barvami.

4.4.17 Důsledek. Protože problém rozkladu je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

4.4.18 SubsetSum.
Úloha: Jsou dána kladná čísla a_1, a_2, $\ldots, a_n$ a číslo K.
Otázka: Lze vybrat podmnožinu čísel a_1, a_2, $\ldots, a_n$ tak, aby jejich součet byl roven číslu K?

Jinými slovy, existuje $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že

$$\sum_{i \in J} a_i = K.$$

4.4.19 Tvrzení. Platí

$$\text{problém rozkladu} \lhd_p \text{SubsetSum.}$$

4.4.20 Převod problému rozkladu na SubsetSum. Je dána konečná množina X a systém jejích podmnožin $\mathcal{S}$. Přejmenujeme prvky X tak, že $X = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ a $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$.

Zvolíme přirozené číslo p větší než r (počet prvků $\mathcal{S}$). Každé podmnožině S_i přiřadíme kladné číslo a_i takto: Ke každé množině S_i označíme χ_{S_i} její charakteristickou funkci; tj. $\chi_{S_i}(j) = 1$ právě tehdy, když $j \in S_i$. Pak

$$S_i \longrightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{S_i}(j)\, p^j = a_i.$$

Nakonec zvolíme číslo $K = \sum_{i=0}^{n-1} p^i$.

Protože $p > r$, není těžké ukázat, že

$$\sum_{i \in J} a_i = K \; \text{ právě tehdy, když } \; \mathcal{A} = \{S_i \mid i \in J\} \text{ je rozklad } X.$$

4.4.21 Důsledek. Protože SubsetSum je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

4.4.22 Poznámka. Nyní není těžké sestrojit polynomiální redukci problému SubsetSum na problém dělení kořisti nebo na problém batohu. Proto jsou i tyto dvě úlohy $\mathcal{NP}$ úplné.

4.4.23 Problém klik.
Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček a číslo k.
Otázka: Existuje v grafu G klika o alespoň k vrcholech?

4.4.24 Tvrzení. Platí

$$3 - CNF\ SAT \lhd_p \text{ problém klik.}$$

4.4.25 Nástin převodu $3 - CNF\,SAT$ na problém klik. Je dána formule φ v CNF, s k klauzulemi $C_1, C_2, \ldots, C_k$, kde každá klauzule má nejvýše 3 literály. Sestrojíme k-partitní neorientovaný graf $G = (V, E)$ takto:

G má pro každou klauzuli jednu stranu; strana odpovídající klauzuli C se skládá z vrcholů označených literály klauzule C. Hrany grafu G vedou vždy mezi dvěma stranami a to tak, že spojují dva literály, které nejsou komplementární (tj. jeden není negací druhého).

Platí: Formule φ je splnitelná právě tehdy, když v grafu G existuje klika o k vrcholech. (Poznamenejme, že k je počet klauzulí formule φ.)

Jestliže φ je pravdivá v ohodnocení u, vybereme v každé klauzuli formule φ jeden literál, který je v daném ohodnocení pravdivý. Pak množina vrcholů odpovídajících těmto literálům tvoří kliku v G o k vrcholech.

Jestliže v grafu G existuje klika A o k vrcholech, pak A má jeden vrchol v každé straně grafu G. Položme jako pravdivé všechny literály, které se nacházejí v A a hodnoty ostatních logických proměnných zadefinujme libovolně. Pak v tomto ohodnocení je formule φ pravdivá.

Zkonstruovaný graf G má tolik vrcholů jako má formule φ literálů, tj. n vrcholů, kde n je délka formule φ. Vzhledem k tomu, že prostý graf s n vrcholy má $\mathcal{O}(n^2)$ hran, jedná se o polynomiální redukci.

4.4.26 Důsledek. Protože problém klik je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

4.4.27 Nezávislé množiny. Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček. Množina vrcholů $N \subseteq V$ se nazývá *nezávislá množina* v G, jestliže žádná hrana grafu G nemá oba krajní vrcholy v N. Jinými slovy, indukovaný podgraf množinou N je diskrétní graf.

Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf G bez smyček a číslo k.

Otázka: Existuje v G nezávislá množina o k vrcholech?

4.4.28 Tvrzení. Platí

$$\text{problém klik} \lhd_p \text{ nezávislé množiny.}$$

4.4.29 Převod problému klik na nezávislé množiny. Je dán prostý neorientovaný graf bez smyček $G = (V, E)$. Definujeme opačný graf $G^{op} = (V, E^{op})$ takto:

$$\{u, v\} \in E^{op} \text{ právě tehdy, když } u \neq v \text{ a } \{u, v\} \notin E.$$

Platí: Množina $A \subseteq V$ je klika v grafu G právě tehdy, když je maximální nezávislou množinou v grafu G^{op}. (Jinými slovy, A je nezávislá množina a přidáním libovolného vrcholu už nebude nezávislá.)

To, že se jedná o polynomiální redukci vyplývá z faktu, že všech hran v grafu G i doplňkovém grafu G^{op} je $\frac{n(n-1)}{2}$, kde n je počet vrcholů.

4.4.30 Důsledek. Protože úloha o nezávislých množinách je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

4.4.31 Vrcholové pokrytí. Je dán prostý neorientovaný graf bez smyček $G = (V, E)$. Podmnožina vrcholů $B \subseteq V$ se nazývá *vrcholové pokrytí* G, jestliže každá hrana grafu G má alespoň jeden krajní vrchol v množině B.

Poznamenejme, že celá množina vrcholů V je vrcholovým pokrytím, problém je najít vrcholové pokrytí o co nejmenším počtu vrcholů.

Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf G bez smyček a číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G vrcholové pokrytí o k vrcholech?

4.4.32 Tvrzení. Platí

$$\text{nezávislé množiny} \lhd_p \text{vrcholové pokrytí.}$$

4.4.33 Nástin převodu nezávislých množin na vrcholové pokrytí. Platí: Je-li množina N nezávislá množina grafu G, pak množina $V \setminus N$ je vrcholovým pokrytím grafu G. A naopak, je-li B vrcholové pokrytí grafu G, pak množina $V \setminus B$ je nezávislá množina v G.

Proto: Je dán prostý neorientovaný graf G bez smyček a číslo k. Pak v G existuje nezávislá množina o k vrcholech právě tehdy, když v G existuje vrcholové pokrytí o $n - k$ vrcholech, kde $n = |V|$ je počet vrcholů grafu G.

4.4.34 Důsledek. Protože problém vrcholového pokrytí je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

4.4.35 Existence hamiltonovského cyklu.
Úloha: Je dán orientovaný graf G.
Otázka: Existuje v grafu G hamiltonovský cyklus? (Jinými slovy, existuje v grafu G cyklus procházející všemi vrcholy?)

4.4.36 Tvrzení. Platí

$$\text{vrcholové pokrytí} \lhd_p \text{existence hamiltonovského cyklu.}$$

4.4.37 Základní myšlenka převodu. Převod je založen na využití speciálního grafu H o 4 vrcholech a 6 orientovaných hranách. Graf H má tuto vlastnost: Má-li být graf součástí hamiltonovského cyklu, pak jsou jen dva základní způsoby průchodu grafem H, buď se projdou všechny vrcholy za sebou, nebo při dvojím průchodu vždy dva a dva.

Předpokládejme, že je dán neorientovaný prostý graf $G = (V, E)$ bez smyček a číslo k. Je možno vytvořit orientovaný graf G' takový, že v G existuje vrcholové pokrytí o k vrcholech právě tehdy, když v G' existuje hamiltonovský cyklus.

Graf G' se, zhruba řečeno, vytvoří takto: Za každou hranu grafu G do G' dáme kopii grafu H. Kromě takto získaných vrcholů přidáme ještě vrcholy $1, 2, \ldots, k$. Celkově tedy počet vrcholů grafu G' je $4|E| + k$. Hrany grafu G' jsou jednak hrany všech kopií grafu H, jednak hrany vedoucí mezi nimi a dále hrany do a z vrcholů $1, 2, \ldots, k$. Celkově je hran grafu G' také úměrně počtu hran grafu G plus k-násobek počtu vrcholů grafu G. To znamená, že redukce je polynomiální.

4.4.38 Důsledek. Protože problém existence hamiltonovského cyklu je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

4.4.39 Hamiltonovská kružnice
Podobně jako jsme v 4.4.36 ukázali, že se problém vrcholového pokrytí polynomiálně redukuje na problém existence hamiltonovského cyklu, dá se sestrojit i redukce

$$\text{vrcholové pokrytí } \lhd_p \text{ existence hamiltonovského kružnice.}$$

Rozdíl je pouze v tom, že pomocný graf je složitější.

4.4.40 Důsledek. Protože problém existence hamiltonovské kružnice je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

4.4.41 Tvrzení. Platí

$$\text{existence hamiltonovské kružnice } \lhd_p \text{ problém obchodního cestujícího.}$$

Převod zmíněný v tvrzení je velmi jednoduchý a je ponechán studentům jako domácí úkol.

4.4.42 Důsledek. Protože problém obchodního cestujícího je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

4.4.43 Tvrzení. Platí

$$\text{existence hamiltonovského cyklu } \lhd_p \text{ existence orient. hamiltonovské cesty.}$$

Převod zmíněný v tvrzení je jednoduchý a ukážeme si jej na cvičení.

4.4.44 Důsledek. Protože problém existence hamiltonovské cesty je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

4.4.45 Tvrzení. Platí

$$\text{existence orient. hamiltonovské cesty } \lhd_p \text{ nejdelší oriet. cesty v orient. grafu.}$$

Převod zmíněný v tvrzení je velmi jednoduchý.

4.4.46 Důsledek. Protože problém nejdelších cest v orientovaném grafu je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

4.4.47 Tvrzení. Platí

$$\text{nejdelší cesty v orient. grafu } \lhd_p \text{ nejkratší cesty v orient. grafu.}$$

Převod zmíněný v tvrzení je velmi jednoduchý.

4.4.48 Důsledek. Protože problém nejkratších cest v orientovaném grafu je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.