Teorie algoritmů — 2. týden

Marie Demlová
http://math.fel.cvut.cz/en/people/demlova

27. 2. 2024

Řešení rekursivních vztahů

Základní metoda.
Vychází z teorie řešení diferenčních rovnic.

Příklad. Hanoiské věže:

$$T(n) = 2T(n-1) + 1.$$

Metoda založená na odhadu.
Odhadneme růst a pak dokazujeme matematickou indukcí.

Příklad.

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n.$$

Řešení rekursivních vztahů

Rekursivní stromy.
Další metoda využívá rekursivní stromy. Používá se buď k přímému výpočtu, častěji k nalezení co „nejtěsnějšího“ odhadu (který pak dokazujeme indukcí).

Příklad 1. Řešme rekurentní vztah

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2.$$

Příklad 2. Řešme rekurentní vztah

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n.$$

Řešení rekursivních vztahů

Věta — „Master Theorem“.
Jsou dána přirozená čísla $a \geq 1$, $b > 1$ a nezáporná funkce $f(n)$. Předpokládejme, že funkce $T(n)$ je dána na přirozených číslech rekurentním vztahem

$$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

kde $\frac{n}{b}$ znamená buď $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ nebo $\lceil \frac{n}{b} \rceil$.

1. Jestliže $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pro nějakou konstantu $\varepsilon > 0$, pak $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Jestliže $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, pak $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. Jestliže $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ pro nějakou konstantu $\varepsilon > 0$ a jestliže $a\,f(\frac{n}{b}) \leq c\,f(n)$ pro nějakou konstantu $c < 1$ pro všechna dostatečně velká n, pak $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Důkaz Master Theorem pro $n = b^j$.

Lemma 1. Za předpokladů MT platí

$$T(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(\frac{n}{b^j}) + h(n),$$

kde $h(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$.

Lemma 2. Pro $g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$ platí:

1. Je-li $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a-\varepsilon})$ pro $\varepsilon > 0$, pak $g(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a})$.
2. Je-li $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, pak $g(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. Je-li $a\, f(\frac{n}{b}) \leq c\, f(n)$ pro $c < 1$, pak $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Řešení rekursivních vztahů

Tvrzení.
Jsou dána přirozená čísla $a \geq 1$, $b > 1$ a nezáporná funkce $f(n)$. Předpokládejme, že funkce $T(n)$ je dána na přirozených číslech rekurentním vztahem

$$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

kde $\frac{n}{b}$ znamená buď $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ nebo $\lceil \frac{n}{b} \rceil$.

Jestliže $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ pro $k \geq 0$, pak pro funkci $T(n)$ danou rovnicí

$$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

platí: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$.

Řešení rekursivních vztahů

Příklad špatné indukce.

Základní krok: Pro $n = 1$ platí $1 \in \mathcal{O}(1)$.

Indukční krok: Předpokládejme, že $\sum_{i=1}^{n} i \in \mathcal{O}(n)$. Pak

$$f(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) + (n+1) \in \mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n) \quad \text{tedy i v } \mathcal{O}(n).$$

Co je špatně na tomto důkazu?