

Teorie algoritmů — 4. týden

Marie Demlová

<http://math.fel.cvut.cz/en/people/demlova>

12. 3. 2024

Nejkratší cesty

$G = (V, E)$ – prostý orientovaný graf s ohodnocením $a: E \rightarrow \mathbb{Z}$.
Označme n počet vrcholů G , tj. $n = |V|$.

Matice délek A

$$a(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{pro } i = j \\ a(e), & \text{pro } e = (i,j) \in E \\ \infty, & \text{pro } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Nejkratší cesty

Matice vzdáleností U

$$u(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{pro } i = j, \\ \text{délka nejkratší cesty z } i \text{ do } j, & \text{existuje-li cesta z } i \text{ do } j \\ \infty, & \text{neexistuje-li cesta z } i \text{ do } j \end{cases}$$

Nejkratší cesty

Předpokládejme, že v grafu G je vrchol y orientovaně dostupný z vrcholu x . Pak platí:

1. Jestliže graf G obsahuje pouze cykly kladné délky (tj. neobsahuje ani cykly záporné délky ani nulové délky), pak nejkratší sled z vrcholu x do vrcholu y existuje a je současně nejkratší cestou z x do y .
2. Jestliže v grafu G neexistuje cyklus záporné délky, pak nejkratší sled z x do y má stejnou délku jako nejkratší cesta z x do y .
3. Jestliže v grafu G neexistuje cyklus záporné délky, pak pro každý sled C z x do y existuje cesta z x do y , která je kratší nebo stejně dlouhá jako sled C .

Nejkratší cesty

Trojúhelníková nerovnost

Jestliže graf G neobsahuje cyklus záporné délky, pak pro každé tři vrcholy x, y, z platí

$$u(x, y) \leq u(x, z) + u(z, y).$$

Bellmanův princip optimality

Jestliže graf G neobsahuje cyklus záporné délky, pak pro každé dva různé vrcholy x, y platí

$$u(x, y) = \min_{z \neq y} (u(x, z) + a(z, y)).$$

Nejkratší cesty z r

Obecné schema.

Vstup: Orientovaný graf $G = (V, E)$ bez cyklů záporné délky,
 $a: E \rightarrow \mathbb{Z}$.

Výstup: Hodnoty $U(v)$, které jsou $u(r, v)$.

1. (Inicializace.)

$U(r) := 0, U(v) := \infty$ pro $v \neq r$;

2. (Zpracování hran.)

Existuje-li hrana $e = (v, w)$ taková, že

$$U(w) > U(v) + a(e)$$

položíme $U(w) := U(v) + a(e)$.

3. (Ukončení.)

Je-li $U(w) \leq U(v) + a(e)$ pro každou hranu $e = (v, w)$, stop.

Jinak pokračuj krokem 2.

Nejkratší cesty z r

Tvrzení.

Jestliže G neobsahuje cyklus záporné délky a $U(v) \neq \infty$, pak $U(v)$ je délka nějaké cesty z r do v .

Věta. Jestliže G neobsahuje cyklus záporné délky a hodnoty $U(v)$ byly spočítány podle obecného schematu, který skončil, pak $U(v) = u(r, v)$.

Nejkratší cesty z r

Algoritmus 1.

Vstup: Ohodnocený orientovaný graf bez cyklů záporné délky, r .

Výstup: $U(v) = u(r, v)$.

1. (Inicializace.)

$$U(r) := 0, U(v) := \infty \text{ pro } v \neq r$$

2. (Zpracování hran.)

Pro každou hranu $e \in E$ provedeme

$$\text{jestliže } U(KV(e)) > U(PV(e)) + a(e)$$

$$\text{pak } U(KV(e)) := U(PV(e)) + a(e)$$

3. (Ukončení.)

Jestliže v kroku 2 se nezmění $U(v)$, stop a vrátíme $U(v)$.

Jinak pokračujeme krokem 2.

Nejkratší cesty z r

Algoritmus 2.

Vstup: Ohodnocený orientovaný graf bez cyklů záporné délky, r .

Výstup: $U(v) = u(r, v)$.

1. (Inicializace.)

$U(r) := 0$, $U(v) := \infty$ pro $v \neq r$; $M := \{r\}$

2. (Zpracování hran.)

Dokud $M \neq \emptyset$, vyber $x \in M$;

$M := M \setminus \{x\}$

pro každou hranu e s $PV(e) = x$ provedeme

jestliže $U(KV(e)) > U(x) + a(e)$

pak $U(KV(e)) := U(x) + a(e)$; $M := M \cup \{KV(e)\}$

3. (Ukončení.)

vrátíme $U(v)$; stop

Nejkratší cesty z r

Strategie pro výběr hrany e

- ▶ Množina M je FIFO.
- ▶ Vyber vrchol $v \in M$ s nejmenší hodnotou $U(v)$.

Příklad.

Je dán orientovaný ohodnocený graf tabulkou

IV	1	1	2	2	3	4	5	5	5	5
EV	2	5	4	5	2	3	1	2	3	4
a	3	4	2	2	-5	4	6	-2	6	0

Najděme nejkratší cesty z vrcholu 1.

Nejkratší cesty mezi všemi dvojicemi vrcholů.

Floydův algoritmus.

Označme $V = \{1, 2, \dots, n\}$.

Floydův algoritmus (také Floyd-Warshallův algoritmus) konstruuje matice $U_k = (u_k(i, j))$ řádu n , $k = 0, 1, \dots, n$ s těmito vlastnostmi:

$$u_k(i, j) = d,$$

kde d je délka nejkratší cesty z i do j , která obsahuje vnitřní vrcholy pouze mezi $1, 2, \dots, k$.

Nejkratší cesty mezi všemi dvojicemi vrcholů.

Tvrzení.

Platí

1. U_0 je matice délek A .
2. U_n je matice vzdáleností U .
3. Matice U_{k+1} vznikne z U_k takto:

$$u_{k+1}(i, j) = \min\{u_k(i, j), u_k(i, k + 1) + u_k(k + 1, j)\}.$$

Nejkratší cesty mezi všemi dvojicemi vrcholů.

Floydův algoritmus

Vstup: matice délek A .

Výstup: matice vzdáleností $M = U$.

1. $M := A$
2. begin
 for $k = 1, 2, \dots, n$ do
 for $i = 1, 2, \dots, n$ do
 for $j = 1, 2, \dots, n$ do
 begin
 if $M(i, j) > M(i, k) + M(k, j)$ then
 $M(i, j) = M(i, k) + M(k, j)$
 end
 end
 end
 end
 end
end