Teorie algoritmů — 8. týden

Marie Demlová
http://math.feld.cvut.cz/en/people/demlova

9. 4. 2024

Cookova věta.

SAT je $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Důkaz.

1) SAT patří do $\mathcal{NP}$.

2) Musíme ukázat, že každá $\mathcal{NP}$ úloha se polynomiálně redukuje na SAT. Protože $\mathcal{V} \in \mathcal{NP}$ iff existuje NTM M přijímající $L_{\mathcal{V}}$ v polynomiálním čase $p(n)$, stačí:

Pro libovolný NTM M a slovo w zkonstruujeme formuli $\varphi_{M,w}$ takovou, že

$$M \text{ přijímá } w \text{ právě tehdy, když } \varphi_{M,w} \text{ je splnitelná.}$$

Podmínky, které $\varphi_{M,w}$ musí splňovat:

1) V čase i, $i = 0, \dots, p(n)$, je NTM M v právě jednom stavu.
2) V čase i, $i = 0, \dots, p(n)$, hlava M čte právě jedno pole pásky.
3) V čase i, $i = 0, \dots, p(n)$, každé pole pásky obsahuje právě jeden páskový symbol.
4) Na začátku práce M (tj. v čase 0), M je v počátečním ID.
5) Každý krok M je určen δ; tj. stav M v čase $i+1$, obsah čteného pole, a pole které M čte v čase $i+1$ je určeno δ.
6) Obsah pole pásky, které M nečte v čase i zůstávají stejné i v čase $i+1$.
7) Je-li M v čase i ve stavu q_f, je ve stavu q_f i v čase $i+1$.
8) V čase $p(n)$ je M ve stavu q_f.

Logické proměnné $\varphi_{M,w}$.

- s_i^q, $i = 0, 1, \ldots, p(n)$, $q \in Q$;

  to, že s_i^q je pravdivá znamená, že v čase i je M ve stavu q.

- $h_{i,j}$, $i = 0, 1, \ldots, p(n)$, $j = 1, 2, \ldots, p(n)$;

  to, že $h_{i,j}$ je pravdivá znamená, že M v čase i čte j-té políčko pásky.

- $t_{i,j}^A$, $i = 0, 1, \ldots, p(n)$, $j = 1, 2, \ldots, p(n)$, $A \in \Gamma$;

  to, že $t_{i,j}^A$ je pravdivá znamená, že v čase i je pásce v j-tém políčku symbol A.

Podmínky, které $\varphi_{M,w}$ musí splňovat:

1) V čase i, $i = 0, \ldots, p(n)$, se NTM M nachází v právě jednom stavu.
2) V čase i, $i = 0, \ldots, p(n)$, hlava M čte právě jedno pole pásky.
3) V čase i, $i = 0, \ldots, p(n)$, každé pole pásky obsahuje právě jeden páskový symbol.
4) Na začátku práce M (tj. v čase 0), M je v počátečním ID.
5) Každý krok M je určen δ; tj. stav M v čase $i+1$, obsah čteného pole, a pole, které M čte v čase $i+1$ je určeno δ.
6) Obsah pole pásky, které M nečte v čase i zůstá stejné i v čase $i+1$.
7) Je-li M v čase i ve stavu q_f, je ve stavu q_f i v čase $i+1$.
8) V čase $p(n)$ je M ve stavu q_f.

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Metoda

Ukázat, že rozhodovací úloha $\mathcal{V}$ je $\mathcal{NP}$ úplná, je potřeba

1. ověřit, že $\mathcal{V} \in \mathcal{NP}$;
2. najít $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu $\mathcal{U}$, pro kterou
$$\mathcal{U} \lhd_p \mathcal{V}.$$

Zatím známe jen jednu $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu — SAT

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

3-CNF SAT

Úloha: Je dána formule φ v CNF taková, že každá klauzule obsahuje nejvýše 3 literály. Je φ splnitelná?

Tvrzení.

Platí

$$\text{SAT} \lhd_p \text{3-CNF SAT}.$$

Důsledek.

Protože 3-CNF SAT je $\mathcal{NP}$ úloha, 3-CNF SAT je také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

k-**barevnost**

Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf G bez smyček a číslo k. Je G k-barevný?

Tvrzení.

Platí

$$\text{3-CNF SAT} \lhd_p \text{3-barevnost}.$$

Důsledek.

Protože 3-barevnost je $\mathcal{NP}$ úloha, je 3-barevnost také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Tvrzení.

Platí

$$\text{3-barevnost } \lhd_p \text{ ILP}.$$

Důsledek.

Protože ILP je $\mathcal{NP}$ úloha, je to také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.