Teorie algoritmů — 9. týden

Marie Demlová
http://math.feld.cvut.cz/en/people/demlova

16. 4. 2024

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Problém rozkladu

Úloha: Je dána konečná neprázdná množina X a systém jejích neprázdných podmnožin $\mathcal{S}$.

Otázka: Je možné vybrat ze systému $\mathcal{S}$ podsystém $\mathcal{A}$ tak, že $\mathcal{A}$ tvoří rozklad množiny X? Jinými slovy, existuje $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ tak, že každé $x \in X$ patří do přesně jedné množiny $\mathcal{A}$?

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Tvrzení.

Platí

$$\text{3-barevnost} \ \lhd_p \ \text{problém rozkladu.}$$

Důsledek.

Protože problém rozkladu patří do $\mathcal{NP}$, je to také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

SubsetSum

Úloha: Jsou dána kladná čísla a_1, a_2, $\ldots, a_n$ a číslo K.

Otázka: Lze vybrat podmnožinu čísel a_1, a_2, $\ldots, a_n$ tak, aby jejich součet byl roven číslu K?
Jinými slovy, existuje $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že

$$\sum_{i \in J} a_i = K$$

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Tvrzení.

Platí

$$\text{problém rozkladu} \ \lhd_p \ \text{SubsetSum}.$$

Důsledek.

Protože SubsetSum patří do $\mathcal{NP}$, je to také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Problém klik

Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček a číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G klika o alespoň k vrcholech?

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Tvrzení.

Platí

$$\text{3-CNF SAT} \ \triangleleft_p \ \text{problém klik.}$$

Důsledek.

Protože problém klik patří do $\mathcal{NP}$, je také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Nezávislé množiny

Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček a číslo k.

Otázka: Existuje v G nezávislá množina o k vrcholech?

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Tvrzení.

Platí

$$\text{problém klik } \lhd_p \text{ nezávislé množiny.}$$

Důsledek.

Protože problém nezávislých množin patří do $\mathcal{NP}$, je také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Vrcholové pokrytí

Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček a číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G vrcholové pokrytí o k vrcholech?

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Tvrzení.

Platí

$$\text{nezávislé množiny} \ \lhd_p \ \text{vrcholové pokrytí.}$$

Důsledek.

Protože problém vrcholového pokrytí patří do $\mathcal{NP}$, je to také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Existence hamiltonovského cyklu

Úloha: Je dán orientovaný graf G.

Otázka: Existuje v grafu G hamiltonovský cyklus? (Jinými slovy, existuje v grafu G cyklus procházející všemi vrcholy?)

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Tvrzení.

Platí

vrcholové pokrytí $\lhd_p$ existence hamiltonovského cyklu.

Důsledek.

Protože problém existence hamiltonovského cyklu patří do $\mathcal{NP}$, je to také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Tvrzení.

Platí

existence hamiltonovské kružnice $\lhd_p$ problém obchodního cestujícího.

Důsledek.

Protože problém obchodního cestujícího patří do $\mathcal{NP}$, je to také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Tvrzení.

Platí

orientovaná hamilt. cesta $\lhd_p$ nejdelší (nejkratší) orient. cesta.

Důsledek.

Protože úloha nejdelší (nejkratší) orientované cesty patří do $\mathcal{NP}$, je to také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.