Teorie algoritmů — 10. týden

Marie Demlová
http://math.fel.cvut.cz/en/people/demlova

23. 4. 2024

Silně $\mathcal{NP}$-úplné úlohy

Příklad – celočíselný problém batohu.

Jsou dána kladná přirozená čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a K.

Otázka. Existují celá čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taková, že $x_i \geq 0$ pro každé i a platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, a_i = K.$$

Existuje algoritmus, který řeší celeočíselný problém batohu v čase $\mathcal{O}(nK)$.

Silně $\mathcal{NP}$-úplné úlohy

Číslo instance I, značíme ho $num(I)$, je největší číslo, které se v dané instanci vyskytuje.

Úloha $\mathcal{U}$ je silně $\mathcal{NP}$-úplná, jestliže existuje polynom $p(n)$ pro který je úloha, omezíme-li se pouze na instance I s $num(I) \leq p(n)$, stále $\mathcal{NP}$-úplná.

- Problém klik, problém existence hamiltonovské kružnice/cyklu, TSP jsou silně $\mathcal{NP}$-úplné úlohy.
- Subsetsum, problém batohu, dělení kořisti nejsou silně $\mathcal{NP}$-úplné úlohy.

Pseudopolynomíální algoritmus

Algoritmus $\mathcal{A}$ je pseudopolynomiální,jestliže existuje polynom p takový, že $\mathcal{A}$ řeší úlohu v čase $\mathcal{O}(p(n, num(I)))$.

Tvrzení.

Kdyby pro některou silně $\mathcal{NP}$-úplnou úlohu existoval pseudopolynomiální algoritmus, který ji řeší, tak $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Heuristiky

Heuristika pro vrcholové pokrytí — 1.

Vstup: Neorientovaný graf $G = (V, E)$. Výstup: Vrcholové pokrytí C grafu G.

```
begin
    C := ∅
        while E ≠ ∅ do
            vyber vrchol v s největším stupněm
            C := C ∪ {v}
            odstraň v s hranami incidentními s v
end
return C
```

Heuristiky a aproximační algoritmy

Heuristika pro vrcholové pokrytí — 2.

Vstup: Neorientovaný graf $G = (V, E)$. Výstup: Vrcholové pokrytí C grafu G.

begin
  $C := \emptyset$
    while $E \neq \emptyset$ do
      vyber hranu $\{u, v\}$
      $C := C \cup \{u, v\}$
      odstraň z E všechny hrany incidentní s vrcholy u, v
end
return C

Heuristiky a aproximační algoritmy

Tvrzení.

Označme C_{min} vrcholové pokrytí G s nejmenším počtem vrcholů. Pak druhá heuristika najde vrcholové pokrytí C takové, že

$$|C| \leq 2\,|C_{min}|.$$

Aproximační algoritmy

Definice.

Je dána optimalizační úloha $\mathcal{U}$ s účelovou funkcí c. Polynomiální algoritmus $\mathcal{A}$ je aproximační algoritmus pro $\mathcal{U}$, jestliže existuje reálné číslo R tak, že pro každou instanci I algoritmus $\mathcal{A}$ najde přípustné řešení $\mathcal{A}(I)$ s hodnotou účelové funkce ne horší než R krát hodnota účelové funkce optimálního řešení.

Algoritmus $\mathcal{A}$ se také nazývá R-aproximační algoritmus.

Heuristiky a aproximační algoritmy

Tvrzení.

Kdyby existovala konstanta R a polynomiální R-aproximační algoritmus $\mathcal{A}$ pro úlohu TSP, pak

$$\mathcal{P} = \mathcal{NP}.$$

Věta.

Když se omezíme pouze na instance TSP, které splňují trojúhelníkovou nerovnost, pak existuje 2-aproximační algoritmus řešící tyto instance.

Třída co-$\mathcal{NP}$

Definice.

Jazyk L patří do třídy co-$\mathcal{NP}$, jestliže jeho doplněk $\overline{L}$ patří do $\mathcal{NP}$.

Rozhodovací úloha $\mathcal{U}$ patří do třídy co-$\mathcal{NP}$, jestliže jazyk $L_{\mathcal{U}}$ patří do co-$\mathcal{NP}$.

Příklad.

Nesplnitelnost booleovských formulí v CNF.

Třída co-$\mathcal{NP}$

Není známo, zda co-$\mathcal{NP} = \mathcal{NP}$.

Lemma.

Máme dva jazyky L_1 a L_2 pro které $L_1 \lhd_p L_2$. Pak také platí $\overline{L_1} \lhd_p \overline{L_2}$.

Tvrzení.

Platí co-$\mathcal{NP} = \mathcal{NP}$ právě tehdy, když existuje $\mathcal{NP}$ úplný jazyk L pro který $\overline{L}$ je ve třídě $\mathcal{NP}$.

Třídy $\mathcal{P}\mathtt{SPACE}$ a $\mathcal{NP}\mathtt{SPACE}$

Třída $\mathcal{P}\mathtt{SPACE}$.

Jazyk L patří do $\mathcal{P}\mathtt{SPACE}$, jestliže existuje deterministický Turingův stroj M, který přijímá jazyk L a pracuje s polynomiální paměťovou složitostí.

Tvrzení.

Platí

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}\mathtt{SPACE}.$$

Třídy $\mathcal{P}\mathtt{SPACE}$ a $\mathcal{NP}\mathtt{SPACE}$

Třída $\mathcal{NP}\mathtt{SPACE}$.

Jazyk L patří do $\mathcal{NP}\mathtt{SPACE}$, jestliže existuje nedeterministický Turingův stroj M, který přijímá jazyk L a pracuje s polynomiální paměťovou složitostí.

Tvrzení.

Platí

$$\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{NP}\mathtt{SPACE}.$$

Třídy $\mathcal{P}$SPACE a $\mathcal{NP}$SPACE

Věta.

Je dán Turingův stroj M (deterministický nebo nedeterministický), který přijímá L s paměťovou složitostí $p(n)$ (p je polynom). Pak existuje konstanta c taková, že M přijme slovo w délky n po nejvýše $c^{p(n)+1}$ krocích.