Teorie algoritmů — 1. týden

Marie Demlová
http://math.fel.cvut.cz/en/people/demlova

18. 2. 2025

Úvod

Teorie algoritmů

Co je obsahem předmětu?

- asymptotický růst funkcí, složitost algoritmů a jejich výpočet, správnost algortimů
- třídy složitosti založené na časové složitosti
- Turingovy stroje
- porovnáváni složitosti úloh – redukce
- třídy složitosti založené na paměťové složitosti
- pravděpodobnostní třídy složitosti
- algoritmická neřešitelnost / nerozhodnutelnost

Úvod

Proč chodit na přednášky?

Je možné aktivně ovlivnit přednášku - dotazy, několik možností vysvětlení látky.

Přednášky budou streamovány.

Informace

Moodle – hlavní zdroj

Webová stránka `http://math.fel.cvut.cz/en/people/demlova/tal`

Úvod

Zápočet

- se získává za aktivní účast na cvičení
  cvičící upřesní na prvním cvičení
- **na cvičení** se píší dva testy — max. 15 a 20 bodů — jsou součástí závěrečné zkoušky

Zkouška

- třetí část písemné zkoušky — max. 50 bodů
- ústní část pro ty, co získali aspoň **42 bodů** ze vše tří částí písemné zkoušky a aspoň **20 bodů** ze třetí části
- z ústní zkoušky je možné získat max. 15 bodů.

Úvod

Algoritmus

Algoritmem rozumíme dobře definovaný proces, tj. posloupnost výpočetních kroků, který přijímá hodnoty (zadání, vstup) a vytváří hodnoty (řešení, výstup).

Problém, úloha

Úloha, též problém, je obecná specifikace vztahu zadání/řešení. Instancí problému, úlohy $\mathcal{U}$ rozumíme konkrétní zadání všech parametrů, které daná úloha (problém) obsahuje. Jinými slovy, instance úlohy je správný příklad zadání.

Řekneme, že algoritmus $\mathcal{A}$ řeší úlohu $\mathcal{U}$, jestliže pro každý vstup (každou instanci problému $\mathcal{U}$) vydá správné řešení.

Úvod

Analýza časové složitosti algoritmu

1. Analýza nejhoršího případu. Jedná se o asymptotický odhad $T(n)$ času potřebného pro vyřešení každé instance velikosti n.
2. Průměrná složitost. Jedná se o asymptotický odhad $T_{aver}(n)$ průměrného času, který je potřeba pro vyřešení instance velikosti n.
3. Amortizovaná složitost je asymptotický odhad průměru nejhoršího připadu pro n po sobě následujících instrukcí/operací.

Asymptotický růst funkcí

Symbol $\mathcal{O}$

Je dána nezáporná funkce $g(n)$. Řekneme, že nezáporná funkce $f(n)$ je $\mathcal{O}(g(n))$, jestliže existuje kladná konstanta c a přirozené číslo n_0 tak, že

$$f(n) \leq c\, g(n) \quad \text{pro všechny } n \geq n_0.$$

$$\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, n_0 \text{ tak, že } f(n) \leq c\, g(n) \ \ \forall n \geq n_0\}.$$

Asymptotický růst funkcí

Symbol Ω

Je dána nezáporná funkce $g(n)$. Řekneme, že nezáporná funkce $f(n)$ je $\Omega(g(n))$, jestliže existuje kladná konstanta c a přirozené číslo n_0 tak, že

$$f(n) \geq c\, g(n) \quad \text{pro všechny } n \geq n_0.$$

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, n_0 \text{ tak, že } f(n) \geq c\, g(n) \ \ \forall\, n \geq n_0\}.$$

Asymptotický růst funkcí

Symbol Θ

Je dána nezáporná funkce $g(n)$. Řekneme, že nezáporná funkce $f(n)$ je $\Theta(g(n))$, jestliže existují kladné konstanty c_1, c_2 a přirozené číslo n_0 tak, že

$$c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n) \quad \text{pro všechny } n \geq n_0.$$

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0, n_0\ c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)\ \ \forall\, n \geq n_0\}.$$

Platí

- $f(n)$ je $\Theta(g(n))$ právě tehdy, když $f(n)$ je zároveň $\mathcal{O}(g(n))$ a $\Omega(g(n))$.
- $f(n)$ je $\Theta(g(n))$ právě tehdy, když $g(n)$ je $\Theta(f(n))$.

Asymptotický růst funkcí

Symbol malé o.

Je dána nezáporná funkce $g(n)$. Řekneme, že nezáporná funkce $f(n)$ je $o(g(n))$, jestliže pro každou kladnou konstantu c existuje přirozené číslo n_0 tak, že

$$0 \leq f(n) < c\,g(n) \quad \text{pro všechny } n \geq n_0.$$

$$o(g(n)) = \{f(n) \mid \forall\, c > 0\ \exists\, n_0 \text{ tak že } 0 \leq f(n) < c\,g(n)\ \ \forall\, n \geq n_0\}.$$

Asymptotický růst funkcí

Symbol malé ω

Je dána nezáporná funkce $g(n)$. Řekneme, že nezáporná funkce $f(n)$ je $\omega(g(n))$, jestliže pro každou kladnou konstantu c existuje přirozené číslo n_0 tak, že

$$0 \leq c\,g(n) < f(n) \quad \text{pro všechny } n \geq n_0.$$

$$\omega(g(n)) = \{f(n) \mid \forall\, c > 0\ \exists\, n_0 \text{ tak že } f(n) > c\,g(n)\ \ \forall\, n \geq n_0\}.$$

Asymptotický růst funkcí

Tvrzení. Jsou dány dvě nezáporné funkce $f(n)$ a $g(n)$. Pak platí

- $f(n) \in o(g(n))$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$;
- $f(n) \in \omega(g(n))$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.
- Jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak $f(n) \in \Theta(g(n))$.

Asymptotický růst funkcí

Tranzitivita. Máme dány tři nezáporné funkce $f(n)$, $g(n)$ a $h(n)$.

- Jestliže $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ a $g(n) \in \mathcal{O}(h(n))$, pak $f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$.
- Jestliže $f(n) \in \Omega(g(n))$ a $g(n) \in \Omega(h(n))$, pak $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- Jestliže $f(n) \in \Theta(g(n))$ a $g(n) \in \Theta(h(n))$, pak $f(n) \in \Theta(h(n))$.

Reflexivita.
Pro všechny nezáporné funkce $f(n)$ platí: $f(n) \in \mathcal{O}(f(n))$, $f(n) \in \Omega(f(n))$ a $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Asymptotický růst funkcí

Tvrzení. $f(n) \in \Theta(g(n))$ právě tehdy, když $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Příklad.

- Pro každé $a > 1$ a $b > 1$ platí
$$\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n)).$$
- Platí
$$\lg n! \in \Theta(n \lg n).$$

Asymptotický růst funkcí

Gauss věta.

Pro každé $n \geq 1$

$$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n .$$

Asymptotický růst funkcí

Věta.

Máme dánu nezápornou funkci $f(n)$, která je neklesající. Jestliže platí $f(\frac{n}{2}) \in \Theta(f(n))$, pak

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(n\, f(n)).$$

Fakt. Matematickou indukcí se dá dokázat, že existuje $c > 0$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i \leq c\, 2^n.$$

Asymptotický růst funkcí

Jiná možnost odhadu funkcí

Je-li $f(n)$ kladná rostoucí funkce, pak

$$\int_0^n f(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{n} f(i) \le \int_1^{n+1} f(x)\,dx.$$

Je-li $f(n)$ kladná klesající funkce, pak

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{n} f(i) \le \int_0^{n} f(x)\,dx.$$