Co byste měl/a zvládnout po 1. týdnu

Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

Upozornění

Řada z následujících pojmů je pouhým opakováním ze střední školy. Nemusí být nutně odcvičeny.

Dokonalé porozumění pojmům matematické češtiny

1. Slovní spojení: *...právě tehdy, když...*, *...a současně...*, *...nebo...*, *jestliže ...*, *potom...*.
2. Ustálené útvary: *definice*, *hypotéza*, *věta* (*lemma*, *tvrzení*, atd), *důkaz*.

Základní číselné obory a jejich operace

1. Množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
2. Iracionální reálná čísla.
3. Komplexně sdružené číslo.
4. Sčítání, odčítání, násobení a dělení v $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Pojmy z teorie polynomů

1. Množiny $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$.
2. Kořen polynomu, násobnost kořene polynomu.
3. Kořenový faktor (také: kořenový činitel).
4. Stupeň polynomu.[a]
5. Dělení polynomu jiným polynomem se zbytkem.

[a] Polynom 0 má stupeň $-\infty$.

Výpočty hodnoty polynomu

1. Přímým dosazením.
2. Hornerovým schematem.

Numerické příklady

1. Spočtěte součin $(3x^5 - 7x + 4) \cdot (2x - 10)$.
2. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^3 + 11x + 30$.
3. Znáte kořen $a = -6$ polynomu $2x^3 + 14x^2 + 14x + 12$. Nalezněte v $\mathbb{C}$ všechny zbývající kořeny tohoto polynomu. Polynom $2x^3 + 14x^2 + 14x + 12$ napište ve tvaru součinu kořenových faktorů.
4. V $\mathbb{C}[x]$ vydělte polynom $3x^4 + 5x$ polynomem $x^2 - 2$ se zbytkem. Vypište kvocient a zbytek.
5. Hornerovým schematem spočtěte hodnotu $p(3)$ pro $p(x) = 7x^4 - 5x^2 + 12x - 6$.
6. Napište reálný polynom, který má přesně následující kořeny $a_0 = -2$ (násobnost 2), $a_1 = 2 - 3i$ (násobnost 1), $a_2 = 2 + 3i$ (násobnost 1).
7. Napište jakýkoli polynom, který má přesně následující kořeny $a_0 = 2 + 3i$ (násobnost 1), $a_1 = 2 - 3i$ (násobnost 2).

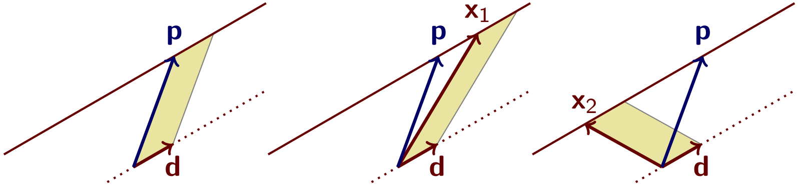
Teoretické otázky

1. Proč polynom $p(x)$ lichého stupně v $\mathbb{R}[x]$ musí mít alespoň jeden reálný kořen?
2. Dokažte, že ke každému kořenu polynomu $p(x)$ v $\mathbb{R}[x]$ existuje kořen komplexně sdružený.
3. Proč nemůže mít polynom stupně n více než n vzájemně různých kořenů?
4. Proč je polynom stupně n určen jednoznačně svými hodnotami v $n+1$ různých bodech?

Co byste měl/a zvládnout po 2. týdnu

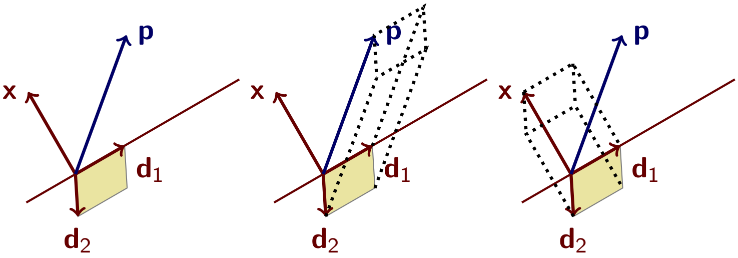
Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

2D geometrie: přímka se směrem d, procházející bodem p



1. Jaký je vztah ploch jednotlivých rovnoběžníků?
2. Jaký je vztah vektorů $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ a $\mathbf{p}$?

3D geometrie: rovina se „směrem“ $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, procházející bodem $\mathbf{p}$



1. Jaký je vztah objemů jednotlivých rovnoběžnostěnů?
2. Jaký je vztah vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{p}$?

Základní pojmy geometrie 2D a 3D prostoru nad $\mathbb{R}$

1. Rovnice obecné přímky v $\mathbb{R}^2$. A její „parametrický tvar“:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}$$

Požadavky na „vektor směru“ přímky?

2. Rovnice obecné roviny v $\mathbb{R}^3$. A její „parametrický tvar“:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}$$

Požadavky na „vektory směru“ roviny?

3. Paralelní posun dané přímky (roviny) tak, aby nová přímka (rovina) procházela počátkem. Jak se to projeví na rovnicích přímky (roviny)?
4. Typy průniků dvou přímek v $\mathbb{R}^2$.
5. Typy průniků dvou (tří) rovin v $\mathbb{R}^3$.

Jaký je geometrický význam řešení následujících soustav?

1. $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

U každé z výše uvedených soustav diskutujte všechny možnosti tvaru řešení

Početní příklady (soustavy v horním blokovém tvaru)

1. Vyřešte soustavu (v $\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 4x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 6x_3 &= 12 \end{aligned}$$

2. Vyřešte soustavu (v $\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 4x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

3. Vyřešte soustavu (v $\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 3x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Pozorování: soustava v horním blokovém tvaru se řeší pohodlně

Převod na horní blokový tvar

$$\begin{array}{rl} 2x_1 - 5x_2 = 16 \\ -x_1 + 2x_2 = -7 \end{array} \sim \begin{array}{rll} 2x_1 - 5x_2 &= 16 & \color{red}{R_1} \text{ řádek 1} \\ -2x_1 + 4x_2 &= -14 & \color{red}{2R_2} \text{ dvojnásobek řádku 2} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rll} 2x_1 - 5x_2 &= 16 & \color{red}{R_1} \\ 0x_1 - x_2 &= 2 & \color{red}{R_2 + R_1} \end{array} \sim \begin{array}{rll} 2x_1 - 5x_2 &= 16 & \color{red}{R_1} \\ x_2 &= -2 & \color{red}{-R_2} \end{array}$$

Takže: $x_2 = -2$, x_1 dopočítáme z první rovnice dosazením: $x_2 = 3$.

Podstata výpočtu = „manipulace s tabulkami“

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -5 & 16 \\ -1 & 2 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -5 & 16 \\ -2 & 4 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \color{red}{R_1} \\ \color{red}{2R_2} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -5 & 16 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \color{red}{R_1} \\ \color{red}{R_2 + R_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -5 & 16 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \color{red}{R_1} \\ \color{red}{-R_2} \end{array}$$

Důležité: značení úprav budeme vždy vypisovat.

Povolené úpravy tabulek (tzv. elementární úpravy)

1. Prohození dvou řádků.
2. Vynásobení řádku nenulovým reálným číslem.
3. Přičtení jednoho řádku k jinému řádku.

Tyto úpravy lze „shlukovat“ (ovšem obezřetně). Například je možné nový třetí řádek nahradit řádkem tvaru $R_3 + 6R_1 - 7R_2$.

Pozorování

1. Elementární úpravy jsou vratné.
2. Elementární úpravy nemění řešení soustavy.
3. Po konečně mnoha elementárních úpravách dostaneme horní blokový tvar.

Důležité

Po úpravách může vyjít řádek samých nul (rovnice $0 = 0$).
Nulový řádek nebudeme ze soustavy vyškrtávat.
Soustava na začátku a na konci výpočtu musí mít stejný počet rovnic.

Teoretické otázky a teoretické dovednosti

1. Jsou dány dva různé body v $\mathbb{R}^2$. Napište rovnici přímky, která těmito dvěma body prochází.
2. Jsou dány dva různé body v $\mathbb{R}^3$. Napište rovnici přímky, která těmito dvěma body prochází.
3. Napište (jakoukoli) soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$, jejímž řešením je přímka v $\mathbb{R}^2$.
4. Napište (jakoukoli) soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$, jejímž řešením je přímka v $\mathbb{R}^3$.
5. Napište (jakoukoli) soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$, jejímž řešením je rovina v $\mathbb{R}^3$.
6. Napište (jakoukoli) soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$, jejímž řešením je prázdná množina v $\mathbb{R}^3$.
7. Promyslete, zda obecné úvahy tohoto cvičení podstatně souvisí s lineárními prostory $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Pokud ne, zobecněte je na řešení soustav r rovnic o s neznámých (nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, atd).

Co byste měl/a zvládnout po 3. týdnu

Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

Základní slovník a základní definice

1. Axiomy obecného tělesa $\mathbb{F}$.
2. Axiomy lineárního prostoru (komutativita operace, asociativita operace) nad obecným tělesem $\mathbb{F}$. Vektor, skalár. Lineární podprostor lineárního prostoru.
3. Seznam vektorů, lineární kombinace seznamu vektorů.
4. Lineární závislost/nezávislost seznamu a množiny vektorů.
5. Lineární obal množiny vektorů.

Základní lineární prostory

1. Vektory v rovině.
2. $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, ...
3. Proč $\mathbb{Z}^n$ spolu se „zřejmými" operacemi netvoří lineární prostor?

Teoretické otázky

1. Ať L je lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Ať α, β jsou libovolné skaláry a ať $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou libovolné vektory z L; $\vec{o}$ je nulový vektor v L. Dokažte nebo vyvraťte:
    1. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{o}$ iff $\vec{u} = \vec{v}$.
    2. $\alpha \cdot \vec{u} = \beta \cdot \vec{u}$ iff $\alpha = \beta$ nebo $\vec{u} = \vec{o}$.
    3. $\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$ iff $\alpha = 0$ nebo $\vec{u} = \vec{v}$.
2. Rozhodněte, zda v libovolném lineárním prostoru L nad $\mathbb{F}$ platí rovnosti

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \vec{u}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \cdot \vec{u}_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_j$$

kde α_i jsou libovolné skaláry ($i = 1, \ldots, n$) a $\vec{u}_j$ jsou libovolné vektory ($j = 1, \ldots, m$).

Početní příklady (prostory a jejich podprostory)

Rozhodněte, zda platí:

1. Množina $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ všech posloupností reálných čísel je lineární prostor nad $\mathbb{R}$, když operace definujeme „po složkách“: $(a_n)_{n=0}^{+\infty} + (b_n)_{n=0}^{+\infty} = (a_n + b_n)_{n=0}^{+\infty}$, $\alpha \cdot (a_n)_{n=0}^{+\infty} = (\alpha \cdot a_n)_{n=0}^{+\infty}$.
2. Množina $W = \{ \begin{pmatrix} r + 2s + t \\ 2r + s - t \\ 3r + 3s + t \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{R} \}$ je lineárním podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$.
3. Množina $\mathbb{C}^{=2\,017}[t]$ všech polynomů s komplexními koeficienty v neurčité t stupně přesně $2\,017$ je lineárním podprostorem prostoru $\mathbb{C}[t]$.
4. Množina $\mathbb{C}^{\leq 2\,017}[t]$ všech polynomů s komplexními koeficienty v neurčité t stupně maximálně $2\,017$ je lineárním podprostorem prostoru $\mathbb{C}[t]$.

Početní příklady (lineární závislost a nezávislost)

1. Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti seznamů vektorů:
   1. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ v libovolném lineárním prostoru L nad $\mathbb{R}$.
   2. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ v lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$.
2. Je možné nalézt číslo $a \in \mathbb{R}$ tak, aby množina vektorů

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

byla lineárně závislá v $\mathbb{R}^3$?

Početní příklady (lineární obal)

1. Určete span(M) v $\mathbb{R}[z]$, kde
   $M = \{0, z+1, z, z^2 - z, 3z^2 + z + 1\}$.

   Lze nalézt množinu N tak, aby platilo $N \subseteq M$ a současně $N \neq M$ a současně $\mathrm{span}(N) = \mathrm{span}(M)$?

2. Ať $\mathbb{C}$ je chápáno jako lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Nalezněte množinu M v $\mathbb{C}$ s co nejmenším počtem prvků tak, aby $\mathrm{span}(M) = \mathbb{C}$.

   Je množina M určena jednoznačně? Pokud ano, dokažte to. Pokud ne, nalezněte další takovou množinu.

3. Nalezněte množinu M v $(\mathbb{Z}_3)^4$ s co nejmenším počtem prvků tak, aby $\mathrm{span}(M) = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \}$.

Teoretické příklady (lineární obal)

1. Rozhodněte, zda v obecném lineárním prostoru L nad $\mathbb{F}$ platí (kde M_1, M_2 a M jsou libovolné podmnožiny L a $\vec{v}$ je libovolný vektor v L):
   1. $\operatorname{span}(M_1 \cup M_2) = \operatorname{span}(M_1) \cup \operatorname{span}(M_2)$.
   2. $\operatorname{span}(M_1 \cap M_2) = \operatorname{span}(M_1) \cap \operatorname{span}(M_2)$.
   3. $\vec{v} \in \operatorname{span}(M)$ iff $M \cup \{\vec{v}\}$ je lineárně závislá množina.
2. Navrhněte, jak v libovolném lineárním prostoru L nad $\mathbb{F}$ zjistit rovnost

$$\operatorname{span}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} = \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$$

   kde $\vec{u}_i$ a $\vec{v}_j$ jsou libovolné vektory z lineárního prostoru L ($i = 1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, m$).

Co byste měl/a zvládnout po 4. týdnu

Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

Slovník základních pojmů

Množina generátorů lineárního prostoru, (uspořádaná) báze lineárního prostoru, dimense lineárního prostoru, souřadnice vektoru vzhledem k uspořádané bázi. Spojení dvou lineárních podprostorů lineárního prostoru.

Základní fakta o dimensi

1. Pro každé $n \geq 0$ je $\dim(\mathbb{F}^n) = n$.
    1. Pro $n = 0$ je $K_0 = \emptyset$ (jediná, tudíž i kanonická) uspořádaná báze prostoru $\mathbb{F}^0 = \{\vec{o}\}$.
    2. Pro $n \geq 1$ je seznam $K_n = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ kanonická báze prostoru $\mathbb{F}^n$. Zde $\mathbf{e}_i$ má na i-té posici 1, všude jinde 0.
2. Příklady lineárních prostorů, které nemají konečnou dimensi:
    1. Prostor $\mathbb{R}[x]$ všech reálných polynomů.
    2. Prostor $\mathbb{R}$ (s obvyklými operacemi) nad tělesem $\mathbb{Q}$. Najděte v tomto prostoru dva lineárně nezávislé vektory, tři lineárně nezávislé vektory.

Důležitá poznámka

Dimense lineárního prostoru typicky závisí na volbě skalárů. Například:

1. Prostor $\mathbb{R}$ nad tělesem $\mathbb{R}$ má dimensi 1.
2. Prostor $\mathbb{R}$ nad tělesem $\mathbb{Q}$ nemá konečnou dimensi.

Kdykoli není jasné nad jakým tělesem $\mathbb{F}$ o daném lineárním prostoru L uvažujeme, budeme poctivě psát lineární prostor L nad $\mathbb{F}$.

Báze a dimense: početní příklady

1. Rozhodněte, zda seznamy B_1, B_2, B_3 jsou (uspořádané) báze lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, kde

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
B_2 &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
B_3 &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

Báze a dimense: početní příklady (pokrač.)

2. Chápejte $\mathbb{C}$ (spolu s obvyklými operacemi) jako lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Nalezněte dvě různé uspořádané báze B_1, B_2 lineárního prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$. Uspořádané báze B_1 a B_2 se nesmí lišit pouze pořadím svých prvků.

   Porovnejte:

   1. $\dim(\mathbb{C}^n)$, kde $\mathbb{C}^n$ je lineární prostor nad tělesem $\mathbb{C}$.
   2. $\dim(\mathbb{C}^n)$, kde $\mathbb{C}^n$ je lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

3. Nalezněte dvě různé uspořádané báze B_1, B_2 lineárního prostoru $\mathbb{Q}^{\leq 2}[x] = \{p(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg(p(x)) \leq 2\}$ nad $\mathbb{Q}$. Uspořádané báze B_1 a B_2 se nesmí lišit pouze pořadím svých prvků.

4. Nalezněte bázi lineárního podprostoru $\operatorname{span}\{2 + x, 1 + 2x\}$ v prostoru $\mathbb{C}[x]$ nad $\mathbb{C}$.

5. Ať V a W jsou lineární podprostory prostoru $\mathbb{R}^5$ nad $\mathbb{R}$, ať $\dim(V) = \dim(W) = 3$. Co lze říci o $\dim(V \vee W)$? Co lze říci o $\dim(V \cap W)$?

Báze: teoretické příklady

1. Ať seznam $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ tvoří uspořádanou bázi lineárního prostoru L nad $\mathbb{F}$, $n \geq 1$. Ať se seznam C liší od seznamu B pouze pořadím svých prvků. Dokažte, že C je uspořádaná báze prostoru L.
   Dejte tomuto tvrzení geometrickou interpretaci.
2. Dokažte, že žádný seznam tvaru $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{n-1})$ nemůže tvořit bázi prostoru $\mathbb{F}^n$ nad $\mathbb{F}$, kde $n \geq 2$.
3. Ať L je lineární prostor konečné dimense nad $\mathbb{F}$. Navrhněte algoritmy, řešící následující problémy:
   1. Pro lineárně nezávislý seznam S hledáme uspořádanou bázi B prostoru L tak, aby seznam S byl prefixem seznamu B.[a]
   2. Pro konečnou množinu G, která generuje L, hledáme uspořádanou bázi B prostoru L tak, aby seznam B obsahoval pouze prvky množiny G.[b]

[a] Tj. seznam S chceme rozšířit na bázi B.
[b] Tj. z konečné množiny generátorů G chceme vybrat bázi B.

Báze: teoretické příklady (pokrač.)

4. Navrhněte algoritmus pro nalezení (nějaké) báze lineárního prostoru konečné dimense.

Souřadnice: početní příklady

1. Najděte souřadnice vektoru $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ v prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ vzhledem k uspořádané bázi
   1. $B = (\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$
   2. $C = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$
   3. $D = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$

Souřadnice: početní příklady (pokrač.)

2. V prostoru $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ nad $\mathbb{R}$ nalezněte souřadnice polynomu $p(x) = 6x^3 - 7x + 12$ vzhledem k bázi
   1. $B = (1, x, x^2, x^3)$
   2. $C = (12, -7x, 15x^2, 6x^3)$

   Jak se změní souřadnice v bázi B pro polynom $\frac{d}{dx} p(x) = 18x^2 - 7$?
3. Ať $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ je jakákoli uspořádaná báze prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$. Označme $\mathbf{coord}_B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

   Ukažte, že platí: jestliže $v_1 \neq 0$, potom je seznam $(\vec{v}, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ opět uspořádaná báze prostoru $\mathbb{R}^3$.
   Dejte tomuto výsledku[a] geometrickou interpretaci.

---

[a] V plné obecnosti se tomuto výsledku říká Exchange Lemma (také: Steinitzova věta o výměně), viz další stranu.

Exchange Lemma (Steinitzova věta o výměně)

Dokažte následující tvrzení:[a]

Ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ je jakákoli uspořádaná báze lineárního prostoru L nad $\mathbb{F}$, $n \geq 1$.
Ať $\vec{v}$ je libovolný vektor z L a ať $B[\vec{v} \leftrightarrow \vec{b}_i]$ je seznam vektorů, který se od B liší pouze výměnou vektoru $\vec{b}_i$ za vektor $\vec{v}$.

Dále označme $\mathbf{coord}_B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Potom pro libovolné $i = 1, \ldots, n$ platí: jestliže $v_i \neq 0$, potom je seznam $B[\vec{v} \leftrightarrow \vec{b}_i]$ opět uspořádaná báze prostoru L.

---

[a] Nevíte-li jak: projděte si podrobně Lemma 3.2.10 skript.

Co byste měl/a zvládnout po 5. týdnu

Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

Slovník základních pojmů

Lineární zobrazení, matice lineárního zobrazení. Operace s lineárními zobrazeními, operace s maticemi.

Velmi důležitý teoretický výsledek

Zadat lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je totéž jako zadat zobrazení $h : B_1 \to L_2$, kde B_1 je libovolná báze lineárního prostoru L_1.

Důležitá instance výše uvedeného

Zadat lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ je totéž jako zadat seznam s vektorů $(\mathbf{f}(\mathbf{e}_1), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{e}_s))$ v $\mathbb{F}^r$.

Tomuto seznamu říkáme matice zobrazení $\mathbf{f}$ (vzhledem ke kanonickým bázím). Taková matice je tabulka skalárů, která má r řádků a s sloupců.

Početní příklady

Spočtěte $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $a\cdot\mathbf{A}$, $a\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ (ovšem pouze v případě, kdy jsou dané operace definovány).

1. Nad $\mathbb{R}$: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $a=-10$.
2. Nad $\mathbb{R}$: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $a=-3$.
3. Nad $\mathbb{C}$: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2+i\\ 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3-i & 4+i\end{pmatrix}$, $a=-i$.
4. Nad $\mathbb{R}$: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $a=-10$, x, y jsou parametry z $\mathbb{R}$.

Matice základních lineárních transformací v rovině

Zadejte maticemi: rotaci o úhel α, projekce na osy, změnu měřítka (a-krát na ose x, b-krát na ose y). Jednotlivé matice označte jako $\mathbf{R}_\alpha$, $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{M}_{a,b}$.

1. Zakreslete akci příslušných lineárních zobrazení na prvcích kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^2$.
2. Zakreslete akce následujících lineárních zobrazení

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{M}_{a,b}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{M}_{a,b}} \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{R}_\beta} \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{P}_x} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{P}_y} \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{M}_{a,b}} \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{M}_{a,b}+\mathbf{P}_x} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{R}_{-\alpha}} \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\alpha\cdot\mathbf{R}_\alpha} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{R}_{-\alpha}} \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{M}_{a,b}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{M}_{a,b}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{M}_{1/a.1/b}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha-\mathbf{P}_x} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{P}_y-\mathbf{R}_\beta} \mathbb{R}^2$$

   na prvcích kanonické báze $\mathbb{R}^2$. Zapište algebraicky matice jednotlivých zobrazení.

Další zajímavé transformace roviny

1. Ukažte, že translace (posunutí) o pevný vektor **b** v rovině obecně není lineární zobrazení.[a]
2. Dejte geometrický význam matici

$$\mathbf{S}_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$.

Vysvětlete, proč se této transformaci anglicky říká shear (česky: zkosení). Dejte geometrický význam hodnotám a a b.

---

[a] Tuto potíž elegantně řeší projektivní geometrie. Zájemce odkazujeme na (nepovinný) handout číslo 14.

Maticové rovnice jako „doplňovačky“

Maticovou rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ lze interpretovat jako hledání zobrazení $\mathbf{X} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^p$, které doplňuje diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^s \arrow[r, dotted, "\mathbf{X}"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{B}"'] & \mathbb{F}^p \arrow[r, "\mathbf{A}"] & \mathbb{F}^r \end{tikzcd}$$

Jak vypadá speciální případ $s = 1$?

Uvědomte si výhody zápisu rovnic pomocí diagramů (rozměrová zkouška).

Pokuste se uhodnout, jak vypadají některá řešení maticové rovnice

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[d, "\mathbf{R}_\alpha"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\mathbf{R}_\alpha"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{X}"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

Mírná ukázka počítačové grafiky

Zadejte písmeno A jako seznam následujících pěti bodů v $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Nakreslete si obrázek.

Označte $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{10}{3} & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ a dejte geometrický význam maticím $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{M}_{a,b} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{S}_{a,b} \cdot \mathbf{A}$, atd. Kreslete obrázky.

Základní lineární transformace v $\mathbb{R}^3$

Zadejte maticemi základní lineární transformace ve 3D prostoru (rotaci o úhel podle některé souřadnicové osy, změnu měřítka, projekce na jednotlivé osy, zkosení).[a]

[a] Postupujte systematicky: studujte akci daného lineárního zobrazení na jednotlivých prvcích kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^3$.

Co byste měl/a zvládnout po 6. týdnu

Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

Slovník základních pojmů

Monomorfismus, epimorfismus, isomorfismus. Jádro, obraz, defekt a hodnost lineárního zobrazení.

Uspořádaná báze, souřadnice vzhledem k uspořádané bázi.

Matice lineárního zobrazení vzhledem k daným bázím, diagram[a]

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_j \arrow[rrr, mapsto] & & & j\text{-tý sloupec } \mathbf{A_f} = \mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_j)) \\
& \mathbb{F}^s \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^r & \\
& L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] & \\
\vec{b}_j \arrow[uuu, mapsto] \arrow[rrr, mapsto] & & & \mathbf{f}(\vec{b}_j) \arrow[uuu, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

kde $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s)$ je uspořádaná báze lineárního prostoru L_1 a $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r)$ je uspořádaná báze lineárního prostoru L_2.

[a] Důležité: připomeňte si rozdíl mezi $\rightarrow$ (šipkou) a $\mapsto$ (šipkou s patkou).

Příklad (jádro, obraz, defekt a hodnost)

Spočtěte jádro, obraz, defekt a hodnost lineárního zobrazení

1. **der** : $\mathbb{R}^{\leq 4}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 4}[x]$
   $(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) \mapsto (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d)$
2. $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
3. $\mathbf{P}_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Příklad (věta o dimensi jádra a obrazu)

Pro matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^7$ jsme zjistili, že $\mathrm{def}(\mathbf{M}) = 4$ a $\mathrm{rank}(\mathbf{M}) = 3$. Je to možné?[a]

[a] Pokud si nejste jisti odpovědí, podívejte se na Větu 3.3.6 ve skriptech.

Příklad (defekt a hodnost po aplikaci isomorfismu)

Ukažte, že pro libovolnou regulární matici $\mathbf{M} : \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^r$ a libovolnou matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ platí rovnosti: $\mathrm{def}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}) = \mathrm{def}(\mathbf{A})$ a $\mathrm{rank}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A})$.

Návod: nejprve dokažte, že $\ker(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}) = \ker(\mathbf{A})$. Pak použijte definici defektu a větu o dimensi jádra a obrazu.

Inverse čtvercové matice

Ať $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je pevná matice. Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. Pro libovolnou matici $\mathbf{B} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ má rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ právě jedno řešení.
2. Rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ má právě jedno řešení.
3. Matice $\mathbf{A}$ je regulární.

Návod: má-li rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ právě jedno řešení, dokažte, že lineární zobrazení $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je epimorfismus. Pak použijte větu o dimensi jádra a obrazu a ukažte, že $\mathbf{A}$ musí být regulární matice.

Matice transformací roviny vzhledem k bázi $B = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$

1. Bázi $B = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ prostoru $\mathbb{R}^2$ dejte geometrický význam.
2. Spočtete matice rotace, změny měřítka, projekce na osy, zkosení (shear) v bázi B.

Ke všem úlohám kreslete obrázky.

Matice lineárního zobrazení

Najděte matici lineárního zobrazení **der** : $\mathbb{R}^{\leq 4}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 4}[x]$
$(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) \mapsto (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d)$
vzhledem

1. k bázi $B = (x^4, x^3, x^2, x, 1)$,
2. k bázi $C = (1, x, x^2, x^3, x^4)$,
3. k bázím $D = ((x-2)^4, (x-2)^3, (x-2)^2, (x-2), 1)$ a $B = (x^4, x^3, x^2, x, 1)$.

Další matice lineárního zobrazení

Ukažte, že zobrazení[a] $p(x) \mapsto p(2x+1)$ je lineární zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ do prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$. Najděte matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem k bázi $(x^2, x, 1)$.

[a] Pokud si nejste jisti, jak toto zobrazení pracuje, spočtěte si nejdříve třeba $(x^2-2) \mapsto ((2x+1)^2-2)$ a $(3x^2+2x) \mapsto (3(2x+1)^2+2(2x+1))$.

Matice součtu lineárních zobrazení a skalárního násobku lineárního zobrazení

Ať lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ a $\mathbf{g} : L_1 \to L_2$ mají matice $\mathbf{A}_\mathbf{f}$ a $\mathbf{A}_\mathbf{g}$ vzhledem k bázím B a C. Ukažte:

1. Lineární zobrazení $\mathbf{f} + \mathbf{g} : L_1 \to L_2$ má matici $\mathbf{A}_\mathbf{f} + \mathbf{A}_\mathbf{g}$ vzhledem k bázím B a C.
2. Pro libovolný skalár a z $\mathbb{F}$ má lineární zobrazení $a \cdot \mathbf{f} : L_1 \to L_2$ matici $a \cdot \mathbf{A}_\mathbf{f}$ vzhledem k bázím B a C.

Návod: využijte diagramy pro hledání matic lineárních zobrazení.

Příklad (Lagrangeova interpolace)

Ať $a_1, \ldots, a_n$ jsou navzájem různá reálná čísla.

1. Ukažte, že zobrazení
$$\mathbf{ev}_{(a_1,\ldots,a_n)} : \mathbb{R}^{\leq n-1}[x] \to \mathbb{R}^n, \quad p(x) \mapsto \begin{pmatrix} p(a_1) \\ p(a_2) \\ \vdots \\ p(a_n) \end{pmatrix}$$
je lineární.
2. Ukažte, že $\mathbf{ev}_{(a_1,\ldots,a_n)}$ je monomorfismus.
3. Proč je $\mathbf{ev}_{(a_1,\ldots,a_n)}$ isomorfismus?
4. Odvoďte z výše dokázaného: pro navzájem různá reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ a jakákoli reálná čísla $b_1, \ldots, b_n$ existuje v $\mathbb{R}^{\leq n-1}$ právě jeden polynom[a] $p(x)$ takový, že platí $p(a_1) = b_1, \ldots, p(a_n) = b_n$.

[a] Říkáme mu Langrangeův interpolační polynom. Vysvětlete, proč se mu říká interpolační.

Příklad (Lagrangeova interpolace, pokrač.)

5. Zvolte $n = 3$ a zvolte $a_1 = -2$, $a_2 = 0$ a $a_3 = 2$.

   Najděte matici $\mathbf{A}$ lineárního zobrazení $\mathbf{ev}_{(a_1,a_2,a_3)} : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázím $(x^2, x, 1)$ a K_3.

   Využijte diagramy

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "\mathbf{A}"] & \mathbb{R}^3 \\
\mathbb{R}^{\leq 2}[x] \arrow[u, "\mathbf{coord}_{(x^2,x,1)}"] \arrow[r, "\mathbf{ev}_{(a_1,a_2,a_3)}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_3}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "\mathbf{A}^{-1}"] & \mathbb{R}^3 \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_3}"] \arrow[r, "(\mathbf{ev}_{(a_1,a_2,a_3)})^{-1}"'] & \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \arrow[u, "\mathbf{coord}_{(x^2,x,1)}"']
\end{tikzcd}
$$

   k návrhu postupu, jak najít polynom $p(x)$ v $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$, pro který platí $p(-2) = 6$, $p(0) = -2$, $p(2) = -2$.

6. Předcházející myšlenky zobecněte na původní situaci navzájem různých reálných čísel $a_1, \ldots, a_n$.

7. Hraje v předcházejících úvahách nějakou roli těleso $\mathbb{R}$?

Co byste měl/a zvládnout po 7. týdnu

Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

Slovník základních pojmů a přehled základních výsledků

1. Matice lineárního zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ vzhledem k uspořádaným bázím $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s)$ prostoru L_1 a $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r)$ prostoru L_2.
2. Základní vlastnosti výpočtu matic „komplikovanějších“ zobrazení (matice složeného zobrazení $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$, matice součtu zobrazení $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, matice skalárního násobku $a \cdot \mathbf{f}$).
3. Matice $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$ transformace souřadnic z báze B do báze C.[a]
4. Základní vlastnosti matic transformace souřadnic: $\mathbf{T}_{B \mapsto B} = \mathbf{E}_n$, $\mathbf{T}_{B \mapsto D} = \mathbf{T}_{C \mapsto D} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto C}$, $\mathbf{T}_{C \mapsto B} = (\mathbf{T}_{B \mapsto C})^{-1}$.
5. Změna matice zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ při změně bází v prostorech L_1 a L_2.

[a] Upozornění: v některých knihách je definován pojem matice přechodu od jedné báze ke druhé bázi. To je jiný pojem než matice transformace souřadnic! Pojem matice přechodu (od báze k bázi) nebudeme v přednášce B6B01LAG používat.

Výpočet souřadnic v netradiční bázi prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$

Kromě kanonické báze K_2 uvažujte v $\mathbb{R}^2$ i o bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, kde $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Spočítejte (bez využití matic transformace souřadnic) $\mathbf{coord}_{K_2} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{coord}_{B} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$. Nakreslete příslušné obrázky v jednotlivých souřadnicových systémech K_2 a B.
2. Nalezněte matici $\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$ z definice (tj. pomocí komutativního diagramu).
3. Zakreslete v $\mathbb{R}^2$ vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, pro který platí rovnost $\mathbf{coord}_B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Spočítejte součin $\mathbf{T}_{B \mapsto K_2} \cdot \mathbf{coord}_B(\mathbf{v})$.

Výpočet souřadnic v netradiční bázi prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ (pokrač.)

4. Jakou rovnost musí splňovat matice $\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}$? Ukažte, že platí
$$\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

5. Matici $\mathbf{M}_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ interpretujte jako matici změny měřítka vzhledem k bázím K_2 a K_2.

   Spočítejte součin $\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} \cdot \mathbf{M}_{2,3} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$.

   Jaký je význam součinu $\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} \cdot \mathbf{M}_{2,3} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_2} \cdot \mathbf{coord}_B(\mathbf{v})$, kde $\mathbf{coord}_B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$?

   Nakreslete obrázek v $\mathbb{R}^2$.

Transformace souřadnic v $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ nad $\mathbb{R}$

1. Ukažte, že $B = (x^2, x, 1)$ a $C = ((x-3)^2, (x-3), 1)$ jsou uspořádané báze prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$.
2. Pro polynom $p(x) = 2x^2 - 7x + 10$ nalezněte vektory $\mathbf{coord}_B(p(x))$ a $\mathbf{coord}_C(p(x))$ bez použití matic transformace souřadnic.
3. Nalezněte (z definice) matici $\mathbf{T}_{C \mapsto B}$.
4. Ověřte,[a] že musí platit rovnost $\mathbf{T}_{B \mapsto C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Spočtěte součin $\mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{coord}_B(q(x))$ pro obecný polynom $q(x) = ax^2 + bx + c$ z $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$.

   Co tento výpočet říká o rozvoji polynomu maximálně druhého stupně se středem v bodě 3?

[a] Využijte k tomu obecných vlastností matic transformace souřadnic.

Co byste měl/a zvládnout po 8. týdnu

Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

Slovník základních pojmů

Maticový zápis soustavy lineárních rovnic. Matice soustavy, rozšířená matice soustavy. Gaussova eliminační metoda, elementární řádkové úpravy, horní blokový tvar matice. Frobeniova věta.

Maticové rovnice. Inversní matice ke čtvercové matici.

Probírané dovednosti

Kromě obvyklého zopakování teoretických pojmů jde především o početní dovednosti: využití GEM pro řešení lineárních soustav, hledání inverse čtvercové matice a řešení maticových rovnic.

Zápis řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nad $\mathbb{F}$

Řešení zapisujeme zásadně v jednom z následujících tvarů

$$\mathbf{x}_p + \operatorname{span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d), \quad \mathbf{x}_p + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \mathbf{x}_i, \alpha_i \in \mathbb{F},$$

kde $\mathbf{x}_1$, ..., $\mathbf{x}_d$ je fundamentální systém homogenní rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ a $\mathbf{x}_p$ je partikulární řešení rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Řešení soustav

Vyřešte nad $\mathbb{R}$ soustavy zadané rozšířenými maticemi:

1. $\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 6 & 5 \end{array}\right)$
2. $\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 5 \\ -2 & 15 & 7 \end{array}\right)$
3. $\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 2 & 0 & 3 & 5 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right)$
4. $\left(\begin{array}{rrrrrrrrr|r} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right)$
5. $\left(\begin{array}{rrr|r} 2a & 3 & 1 & 5 \\ -3 & a & 4 & a \end{array}\right)$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr

Nalezení soustavy, známe-li její řešení

Nalezněte (jakoukoli) soustavu nad $\mathbb{R}$, která má následující řešení:

1. $$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix})$$

2. $$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Postup zobecněte pro obecné těleso $\mathbb{F}$: dejte návrh procedury, která nalezne (nějakou) soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{F}$, která má zadané řešení.[a]

[a] Nejste-li si jisti, podívejte se na Tvrzení 6.4.8 skript.

Hledání inversní matice pomocí GEM

1. Vysvětlete, proč metoda $(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}_n) \sim \ldots \sim (\mathbf{E}_n \mid \mathbf{A}^{-1})$ hledání inverse matice $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ opravdu funguje.[a]
2. Pro matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 38\,216\,231 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$ nalezněte inverse (pokud existují).

3. Nalezněte inversi matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4+i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{C}$ (pokud existuje).

---

[a] Návod: uvažujte o paralelním řešení maticové rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$. Ukažte, že výpočet lze zobecnit na $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) \sim \ldots \sim (\mathbf{E}_n \mid \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})$.

Maticové rovnice

Nad $\mathbb{R}$ vyřešte následující maticové rovnice:[a]

1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.
2. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^3 \cdot \mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

---

[a] Návod: zjistěte vždy nejprve rozměry hledané matice $\mathbf{X}$ a jednotlivé položky nalezněte řešením příslušných soustav lineárních rovnic.

Ne zcela geometrické aplikace soustav lineárních rovnic

1. Pro chemickou reakci[a] $xC_4H_{10} + yO_2 \to uCO_2 + vH_2O$ sestavte příslušnou soustavu lineárních rovnic a vyřešte ji. Proč tato soustava nemá pouze jedno řešení?

2. Virus existuje ve třech mutacích M_1, M_2 a M_3. Počáteční populaci viru označte jako vektor $\mathbf{x}_0$ v $\mathbb{R}^3$. Ať se vývoj populace viru v diskrétním čase řídí maticovou rovnicí $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_n$, $n \geq 0$.

   Definujte ekvilibrium (také: rovnovážný stav) populace viru jako řešení jisté maticové rovnice.

   Navrhněte nutnou a postačující podmínku pro existenci alespoň jednoho nenulového ekvilibria populace viru.[b]

---

[a] Jde o rovnici hoření butanu.

[b] Klíčová slova k problémům tohoto typu: discrete dynamical systems.

Aplikace soustav lineárních rovnic (pokrač.)

3. Leontiefův[a] input-output model ekonomiky je dán dvěma následujícími požadavky:
   1. i-tý sektor z n různých sektorů ekonomiky spotřebuje na jednotku své produkce c_{ij} jednotek produkce j-tého sektoru.
   2. Navíc: poptávka po produkci i-tého sektoru je d_i jednotek.

   Matici $\mathbf{C} = (c_{ij})$ typu $n \times n$ se říká consumption matrix, vektoru $\mathbf{d} = (d_i)$ se říká demand vector.

   Co říká zápis $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_n + \mathbf{d}$, kde n je přirozené číslo?

   Sestavte maticovou rovnici pro ekvilibrium dané ekonomiky. Jaké podmínky zaručí existenci právě jednoho ekvilibria?

[a] W. W. Leontief (1905–1999) byl americký ekonom ruského původu.

Aplikace soustav lineárních rovnic (pokrač.)

4. Matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ říkáme řádkově stochastická, pokud je součet položek na každém řádku matice $\mathbf{A}$ roven číslu 1.

   Ukažte, že pro řádkově stochastickou matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ platí rovnost

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Z výše uvedené rovnosti odvoďte, že rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ má vždy nenulové řešení, jestliže $\mathbf{A}$ je řádkově stochastická matice.[a]

[a] Tohoto faktu vtipně využívá například algoritmus `PageRank`, viz K. Bryan a A. Leise, The \$ 25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google, *SIAM Rev.* 48.3 (2006), 569–581, nebo Dodatek E skript.

Co byste měl/a zvládnout po 9. týdnu

Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

Zamyšlení po 1. testu: Matematika je součástí kultury lidstva.

1. Matematika je jazyk; je nutné znát (a správně používat) některá označení: $\in$, $=$, $\to$, $\mapsto$, $\{a, b, c\}$, atd.
2. Definice, věty, a další matematické útvary píšeme v přirozeném jazyce: česky, slovensky, atd. Gramatiku přirozeného jazyka je třeba ovládat.
3. Důkaz je forma korektní argumentace, která přesvědčuje oponenta o pravdivosti tvrzení. Podívejte se na krátký text o matematických důkazech od Eugenie Cheng.

   Podívejte se i na texty o typech nematematických důkazů: [a]

   1. Proof by authority.
   2. Proof by inductive reasoning. (Neplést s důkazem indukcí!)
   3. Proof by ad hominem argumentation.
   4. Non sequitur proof.
   5. A řadu dalších...

---

[a] Klíčová slova píši anglicky pro usnadnění vyhledávání.

Základní slovíčka pro cvičení

Permutace, různé zápisy permutace (výčtem hodnot, tabulkou, strunovým diagramem), znaménko permutace, skládání permutací.

Determinant čtvercové matice.

Základní výpočetní dovednosti pro cvičení

Výpočet znaménka permutace ze strunového diagramu.

Geometrický význam determinantu matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Dva základní způsoby výpočtu determinantu:

1. Výpočet determinantu z definice.[a]
2. Výpočet determinantu pomocí GEM.[b]

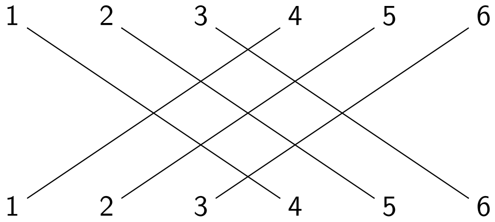
---

[a] Je třeba bezpečně ovládat výpočty determinantu z definice pro matice typu 2×2 a 3×3.

[b] Při výpočtu determinantu pomocí GEM je třeba postupovat opatrně: projděte si Příklad 8.2.18 skript.

Permutace: početní příklady

Každou z níže uvedených permutací zapište ve všech dalších druzích zápisu. U každé z permutací určete její znaménko.

1. π: $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 2$, $4 \mapsto 5$, $5 \mapsto 4$, $6 \mapsto 6$.
2. $\rho = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$
3. $\sigma =$ 

Spočtěte složení $\rho \cdot \pi$ a $\sigma \cdot \rho \cdot \pi^{-1}$ využitím všech tří způsobů zápisu permutací. U permutací $\rho \cdot \pi$ a $\sigma \cdot \rho \cdot \pi^{-1}$ určete znaménko.

Determinanty: početní příklady

Spočtěte následující determinanty (buď z definice, nebo použitím GEM, nebo kombinací jednotlivých metod) nad $\mathbb{R}$:

1. $$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -12 & 4 & 6 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & 7 \\ 13 & 3 & 1 & 0 \\ 26 & 6 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -12 & -8 \end{vmatrix}.$$
2. $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_3)$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ a x je neurčitá.

Determinanty a rovnice přímek a rovin

Ukažte,[a] že rovnici přímky v $\mathbb{R}^2$, která prochází body $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, lze napsat jako

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Úvahu o rovnici přímky zobecněte: napište rovnici roviny v $\mathbb{R}^3$, která prochází body $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

[a] Návod: využijte geometrickou interpretaci determinantu. Nevíte-li jak, podívejte se na Příklad 8.2.20 skript.

Co byste měl/a zvládnout po 10. týdnu

Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

Zopakování všech pojmů a tvrzení týkajících se soustav lineárních rovnic

1. Elementární řádková úprava, horní blokový tvar matice, GEM.
2. Hodnost matice, jádro matice, defekt matice.
3. Maticový zápis soustavy, matice soustavy, rozšířená matice soustavy.
4. Frobeniova věta.
5. Regularita čtvercové matice. Různé metody výpočtu inversní matice.
6. Adjungovaná matice ke čtvercové matici, Cramerova věta.
7. Geometrický význam Cramerovy věty pro regulární soustavy s maticí typu 2×2 nad $\mathbb{R}$.

Výpočet determinantu rozvojem podle sloupce nebo řádku

Nad $\mathbb{R}$ spočtěte determinanty

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

rozvojem podle vhodně zvoleného řádku nebo sloupce.

Příklady (invertování pomocí adjungované matice)

1. Zjistěte pomocí determinantu, zda je matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   invertibilní. Pokud ano, najděte inversi pomocí adjungované matice (tj. výpočtem algebraických doplňků).

2. Nalezněte inverse následujících komplexních matic[a]

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   pomocí adjungované matice (tj. výpočtem algebraických doplňků).

[a] Jde o matice velmi důležité v kvantovém počítání: podívejte se na heslo Pauli gates.

Příklady (invertování pomocí algebraických doplňků)

3. Pomocí adjungované matice invertujte matici[a]

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Pomocí adjungované matice invertujte matici[b]

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha & 0 & 0 \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

[a] Dejte matici $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ geometrický význam. Návod: přemýšlejte o rotaci v rovině.

[b] Dejte matici $\mathbf{L}_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ geometrický význam. Návod: přemýšlejte o rotaci v hyperbolické rovině a podívejte se na heslo Lorentz transformation. Připomenutí: $\sinh\alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$, $\cosh\alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$, takže $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$.

Příklady (Cramerova věta)

1. Ukažte pomocí determinantu, že matice soustavy

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

   je regulární. Nalezněte druhou položku řešení této soustavy.

2. Napište všechna řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} a^2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

Příklady (Cramerova věta, pokrač.)

3. Najděte všechna řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & a+3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

4. Najděte všechny hodnoty parametrů $a, b, c \in \mathbb{R}$, pro které má soustava

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b+c & a+c & a+b & 2 \\ a & b & c & 23 \\ 1 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

jediné řešení.

Závěrečné shrnutí

1. GEM je universální metoda řešení soustav lineárních rovnic. Lze ji tedy použít i pro:
   1. Řešení maticových rovnic.
   2. Invertování matic.
2. V některých speciálních situacích je rozumné GEM kombinovat s jinými metodami (např. Cramerovou větou). Například:
   1. Výpočet inverse matice pomocí algebraických doplňků. Tento postup je zvlášť vhodný pro čtvercové matice obsahující parametry.
   2. Hledání řešení soustav lineárních rovnic se čtvercovou maticí. Tento postup je zvlášť vhodný pro čtvercové matice soustav, které obsahují parametry.

Co byste měl/a zvládnout po 11. týdnu

Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

Základní pojmy

1. Vlastní hodnota (vlastní číslo) lineárního zobrazení/matice, vlastní vektor lineárního zobrazení/matice.
2. Vlastní podprostor (také: invariantní podprostor).
3. Charakteristický polynom matice.
4. Algebraická násobnost a geometrická násobnost vlastní hodnoty (vlastního čísla).
5. Diagonalisace matice.

Početní příklady

Nalezněte vlastní hodnoty a vlastní podprostory následujících zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$:

1. Rotace kolem počátku o úhel α proti směru hodinových ručiček.
2. Projekce na osu x.
3. Změna měřítka (a-krát na ose x, b-krát na ose y, kde $a \neq 0$, $b \neq 0$).
4. Zkosení (shear), tj zobrazení, které je dáno maticí

$$\mathbf{S}_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

   vzhledem ke kanonické bázi $\mathbb{R}^2$.

Pokud to jde, diagonalisujte matice jednotlivých zobrazení vzhledem ke kanonické bázi $\mathbb{R}^2$.

Početní příklady

Diagonalisujte (pokud to jde) následující matice:

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$.
3. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{C}$.

Diagonalisace a umocňování

Spočtěte $\mathbf{N}^{2\,017}$ a $\mathbf{M}^{2\,017}$ pro matice[a] $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

---

[a] Návod: matici $\mathbf{M}$ nejprve diagonalisujte a pro umocňování využijte tvaru rovnice pro diagonalisaci.

Početní příklad

Pro lineární zobrazení

$$\begin{aligned} \mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] &\to \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &\mapsto 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

nalezněte (reálné) vlastní hodnoty a vlastní vektory.

Teoretické příklady

1. Ať $\vec{x}$ je nenulový vektor v lineárním prostoru L nad obecným tělesem $\mathbb{F}$. Může být $\vec{x}$ vlastním vektorem nějakého lineárního zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$?
2. Ať a je skalár z tělesa $\mathbb{F}$. Ať $\vec{x}$ je nenulový vektor v lineárním prostoru L nad tělesem $\mathbb{F}$. Může být $\vec{x}$ vlastním vektorem příslušným skaláru a pro nějaké lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$?
3. Ať $\mathbf{f} : L \to L$ je lineární zobrazení, kde L je lineární prostor nad obecným tělesem $\mathbb{F}$. Předpokládejte, že skalár a z $\mathbb{F}$ je vlastní hodnotou zobrazení $\mathbf{f}$ a ať $\vec{v}$ je příslušný vlastní vektor.

   Ukažte, že pro libovolné skaláry b, c z tělesa $\mathbb{F}$ je vektor $\vec{v}$ vlastním vektorem lineárního zobrazení $b \cdot \mathbf{f} + c \cdot \mathbf{id} : L \to L$. Jaká je vlastní hodnota příslušná tomuto vlastnímu vektoru $\vec{v}$?

Příklad pro zamyšlení

Uvažujte o regulární matici $\mathbf{A}$ tvaru $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$.

1. Ukažte, že $\mathbf{A}$ (chápaná jako matice nad $\mathbb{C}$) má vlastní hodnoty $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$.
2. Označte $r = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dále označte jako α úhel[a] mezi vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

   Ukažte, že platí rovnost

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

   Dejte této rovnosti geometrickou interpretaci.[b]

---

[a] Úhlu α se říká argument komplexního čísla $a + bi$. Platí tedy rovnost $a + bi = r \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha) = r \cdot e^{i\alpha}$.

[b] Návod: každá z obou matic má jasnou geometrickou interpretaci.

Příklad (zobecnění předchozího příkladu)

Ať matice $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (chápaná jako matice nad $\mathbb{C}$) má vlastní hodnotu $\lambda = a + bi$, kde $b \neq 0$. Označte jako $\mathbf{x}$ příslušný komplexní vlastní vektor. Dále označte jako $\mathbf{T}$ matici se sloupci $\mathrm{Re}(\mathbf{x})$ (vektor reálných částí položek vektoru $\mathbf{x}$) a $\mathrm{Im}(\mathbf{x})$ (vektor imaginárních částí položek vektoru $\mathbf{x}$).

1. Ukažte, že platí rovnost $\mathbf{M} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1}$, kde
   $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
2. Matici $\mathbf{T}$ interpretujte jako matici transformace souřadnic. Rovnost $\mathbf{M} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1}$ geometricky interpretujte. Využijte přitom geometrickou interpretaci matice $\mathbf{A}$ z předchozího příkladu.

Shrnující slogan: zadat matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s nereálnými vlastními hodnotami znamená: změnu souřadnic, rotaci, změnu měřítka a zpětnou změnu souřadnic.

Pokuste se slogan zobecnit pro matice $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, kde $n > 2$.

Co byste měl/a zvládnout po 12. týdnu

Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

Základní pojmy

1. Skalární součin v lineárním prostoru nad $\mathbb{R}$.
2. Nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunyakovski.
3. Norma vektoru vytvořená skalárním součinem, úhel mezi dvěma vektory.
4. Metrika vytvořená normou.
5. Positivně definitní matice. Metrický tensor (Gramova matice) skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$.

Důležité

Skalární součin vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ značíme $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$.

To jest: skalární součin značíme jinak než ve skriptu Dr Olšáka.

Početní příklady (standardní skalární součin)

Pro vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ spočtěte $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle$, $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$, $\cos\varphi$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, kde φ je úhel, který vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ svírají a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je vzdálenost $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Předpokládejte, že skalární součin je standardní.

1. V $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. V $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. V $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ověřte platnost nerovnosti Cauchy-Schwarz-Bunyakovski u každé dvojice $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Početní příklady (positivně definitní matice)

Pomocí kritéria z přednášky rozhodněte o positivní definitnosti matic:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

U každé positivně definitní matice napište skalární součin, který tato matice vytváří.

Teoretický příklad (rozklady positivně definitních matic)

Ať $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ je positivně definitní matice, kde $\mathbf{R}$ je regulární. Najděte regulární matici $\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}$, pro kterou platí $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1^T \cdot \mathbf{R}_1$.

Početní příklady (skalární součin a ortonormální báze)

Nalezněte skalární součiny, pro něž jsou následující báze ortonormální:

1. Báze $\mathbb{R}^2$: $(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})$.
2. Báze $\mathbb{R}^3$: $(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.
3. Báze $\mathbb{R}^3$: $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$.

Teoretický příklad (zobrazení zachovávající skalární součin)

Ať $\langle - \mid - \rangle$ je skalární součin na $\mathbb{R}^n$ s metrickým tensorem $\mathbf{G}$. Ukažte, že pro $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou následující tři podmínky ekvivalentní:[a]

1. Rovnost $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}' \rangle$ platí pro všechny vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ z $\mathbb{R}^n$.
2. Matice $\mathbf{A}$ je regulární a platí $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}$.
3. Platí $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}$.

Znění výše uvedeného tvrzení zjednodušte pro případ $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$ (tj pro případ standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$).

---

[a] Návod: abyste ukázali druhou podmínku z podmínky první, ukažte nejprve že platí $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}$. K tomu využijte, že podle první podmínky musí pro matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ platit rovnosti $\langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{a}_i \mid \mathbf{a}_j \rangle$ pro všechna i, j. Dále využijte toho, že $\mathbf{G}$ má v j-tém sloupci na i-tém řádku hodnotu $\langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j \rangle$ a $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}$ má v j-tém sloupci na i-tém řádku hodnotu $\langle \mathbf{a}_i \mid \mathbf{a}_j \rangle$. Z rovnice $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}$ a z toho, že $\mathbf{G}$ je regulární, odvoďte, že $\mathbf{A}$ je monomorfismus. Dále použijte větu o dimensi jádra a obrazu, abyste se dozvěděli, že $\mathbf{A}$ je isomorfismus. Zbývající dvě implikace jsou triviální (přesto důkazy napište).

Teoretický příklad (charakterisace rotací v $\mathbb{R}^2$)

Ať $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je jakékoli lineární zobrazení. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. Platí $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ a $\det(\mathbf{A}) = 1$.
2. Existuje α tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{R}_\alpha$ (tj $\mathbf{A}$ je matice rotace o úhel α).

Odvoďte z toho, že rotace v rovině jsou jediná lineární zobrazení $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, která zachovávají standardní skalární součin[a] a která nemění velikost orientovaných ploch.[b]

---

[a] K tomu využijte tvrzení z předchozí strany, modifikované pro standardní skalární součin.

[b] K tomu využijte interpretaci součinu matic $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1, \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2)$, rovnost $\det(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ a geometrickou interpretaci determinantu matice 2×2. Samozřejmě: $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ je sloupcový zápis matice se sloupci $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$.

Co byste měl/a zvládnout po 13. týdnu

Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

Základní pojmy

1. Ortogonální a ortonormální báze.
2. Ortogonální projekce a ortogonální rejekce.
3. Ortogonalisační proces (Gram-Schmidt).
4. Matice ortogonální projekce na podprostor.

Důležité

Skalární součin vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ značíme $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$.

To jest: skalární součin značíme jinak než ve skriptu Dr Olšáka.

Početní příklady (ortogonalisace a ortonormalisace v $\mathbb{R}^n$)

Ortogonalisujte následující báze B:

1. V $\mathbb{R}^2$ s metrickým tensorem $\mathbf{E}_2$: $B = (\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix})$.
2. V $\mathbb{R}^3$ s metrickým tensorem $\mathbf{E}_3$: $B = (\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$.
3. V $\mathbb{R}^3$ s metrickým tensorem $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$:

$$B = (\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Všechny nalezené ortogonální báze poté normalisujte.

Početní příklad (ortogonální projekce a ortogonální rejekce)

V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem nalezněte matice ortogonálních projekcí na podprostory

1. $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
2. $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$.
3. $\mathrm{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Ve všech případech spočtěte pro vektor $\mathbf{v} = 5\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ z $\mathbb{R}^3$ příslušné ortogonální projekce a ortogonální rejekce.

Teoretický příklad (nutné vlastnosti ortogonální projekce)

Ať $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ má lineárně nezávislé sloupce. Předpokládejte, že v $\mathbb{R}^n$ je zadán standardní skalární součin. Ukažte, že matice $\mathbf{P}$ ortogonální projekce na $\mathrm{im}(\mathbf{A})$ má následující tři vlastnosti:

1. $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.
2. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$.
3. $\mathrm{rank}(\mathbf{P}) = k$.

Teoretický příklad

Předpokládejte, že v $\mathbb{R}^n$ je zadán standardní skalární součin, $n \geq 2$. Ať $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je matice ortogonální projekce na podprostor W, $\dim(W) = n - 1$. Co počítají následující matice?[a]

1. $\mathbf{E}_n - \mathbf{P} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
2. $\mathbf{E}_n - 2\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
3. $2\mathbf{P} - \mathbf{E}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

[a] Návod: nevíte-li si rady, nakreslete si obrázky pro $n = 2$ a $n = 3$. Dívejte se, co se děje s vektory z podprostoru W a s vektory mimo podprostor W.

Početní příklady (soustavy a metoda nejmenších čtverců)

Vysvětlete, proč následující tři soustavy nad $\mathbb{R}$ lze řešit metodou nejmenších čtverců[a] a vyřešte je.

1. $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right).$
2. $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$
3. $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{array}\right).$

U každé ze soustav označte nalezené řešení jako $\widehat{\mathbf{x}}$ a spočtěte čtverec normy[b] $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}\|^2$.

Co jste se dozvěděli o řešení první soustavy?

---

[a] Návod: metoda využívá ortogonální projekci na $\mathrm{im}(\mathbf{A})$ v $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Viz Dodatek C skript.

[b] Připomenutí: jde o normu vytvořenou standardním skalárním součinem v $\mathbb{R}^3$.

Příklad lineární regrese v rovině

1. Jediné řešení soustavy $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$ z předchozího příkladu metodou nejmenších čtverců označte jako $\begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix}$.

2. Pro jakákoli a, b z $\mathbb{R}$ interpretujte položky součinu
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \\ a \cdot 2 + b \\ a \cdot 3 + b \end{pmatrix}$$
jako hodnoty na přímce tvaru $y = ax + b$ pro $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

Co říká součin[a] $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix}$ o bodech na přímce $y = \widehat{a}x + \widehat{b}$?

Přímku $y = \widehat{a}x + \widehat{b}$ a body $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ nakreslete.

[a] Připomenutí: soustavu jste řešili metodou nejmenších čtverců.

Lineární regrese v $\mathbb{R}^2$ pomocí metody nejmenších čtverců

Body $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ v $\mathbb{R}^2$, kde $n \geq 2$, chceme vést regresní přímku $y = ax + b$ metodou nejmenších čtverců. To jest: chceme vyřešit soustavu

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

metodou nejmenších čtverců.

Dejte obecnou podmínku pro matici $\mathbf{A}$ této soustavy, která zaručí existenci jediného řešení $\begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix}$ metodou nejmenších čtverců.[a]

Dejte této podmínce význam v řeči hodnot $x_1, \dots, x_n$.

[a] Návod: potřebujete, aby matice $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ byla positivně definitní.

K zamyšlení (nepovinné)

Co dostanete řešením následujících soustav metodou nejmenších čtverců?[a]

1. $$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

---

[a] Návod: uvažujte o lineární regresi ve vyšších dimensích a o regresi křivkami vyšších stupňů.

Co byste měl/a zvládnout po 14. týdnu

Zde je uveden naprostý základ. Nejde o úplný výčet všech dovedností.

Základní pojmy

1. Opakování: těleso, lineární prostor nad obecným tělesem.
2. Sčítání a násobení v obecném $\mathbb{Z}_m$.
3. Soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{Z}_p$, kde p je prvočíslo.
4. Lineární kód nad $\mathbb{Z}_2$ délky n a dimense k.
5. Generující a kontrolní matice lineárního kódu.

Důležitý fakt (bez důkazu)

$\mathbb{Z}_m$ je těleso právě tehdy, když m je prvočíslo.

Početní příklady

1. Spočtěte[a] $9+7$, $4\cdot 8$, $7\cdot(1-8)$, 2^{-1} v $\mathbb{Z}_{11}$.
2. Hrubou silou vyřešte rovnici $3x+5=2$ v $\mathbb{Z}_7$.
3. Zjistěte počet prvků $\mathbb{Z}_{12\,457\,873\,596}$. Jde o těleso?
4. Zjistěte počet prvků a dimensi lineárního prostoru $(\mathbb{Z}_5)^{12}$.
5. Kolik různých prvků má podprostor prostoru $(\mathbb{Z}_2)^n$ dimense k?
6. Napište řešení soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{Z}_2$, zadané rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

[a] Inversi spočtěte hrubou silou.

Početní příklady (pokrač.)

7. Nad $\mathbb{Z}_5$ vyřešte soustavu[a]

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

8. Nalezněte soustavu, která má nad $\mathbb{Z}_7$ řešení[b]

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

[a] Případné potřebné inverse spočtěte hrubou silou.
[b] Případné potřebné inverse spočtěte hrubou silou.

Početní příklady z teorie kódů

Všechny výpočty provádějte nad $\mathbb{Z}_2$.

1. Pro kontrolní matici

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lineárního kódu W nalezněte příslušnou generující matici $\mathbf{G}$ s maximální hodností.
Popište příslušný lineární kód W (i jeho délku a dimensi).

Početní příklady z teorie kódů (pokrač.)

2. Pro generující matici

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lineárního kódu W nalezněte příslušnou kontrolní matici $\mathbf{H}^T$ s maximální hodností.
Popište příslušný lineární kód W (i jeho délku a dimensi).

Příklad (návrh lineárního kódu)

Navrhněte generující a kontrolní matici lineárního kódu W nad $\mathbb{Z}_2$, který má následující dvě vlastnosti:

1. Kódují se slova délky 4 (tj. kód má 4 informační bity).
2. Kódové slovo má délku 8 a vzniká zopakováním informačního slova.