Domácí úkol č. 5 - Lineární podprostory a jejich báze

Požadavky

- Definice a odpovědi pište českou (či slovenskou) větou či větami, nikoli matematickými symboly.
- U výpočtů pište aspoň drobné komentáře.
- U teoretických otázek každé své tvrzení řádně zdůvodněte, samotná správná odpověď nestačí.
- K úspěchu je nutné získat aspoň polovinu z celkového počtu bodů.

Příklady

1. (7 bodů) Ověřte, že seznam vektorů $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ tvoří bázi lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ nad tělesem $\mathbb{R}$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Najděte souřadnice vektoru $\vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ vůči této uspořádané bázi B.

2. (6 bodů) Ověřte, zda množina M tvoří podprostor lineárního prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše tři (nad tělesem $\mathbb{R}$). Pokud ano, nalezněte nějakou bázi podprostoru M a určete jeho dimenzi.

$$M = \{P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ pro } a, b, c, d \in \mathbb{R};\ P(-x) = -P(x)\}$$

   Návod: Nalezněte nejdříve parametrický tvar polynomů z množiny M.

3. (7 bodů) Nechť $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ je báze lineárního prostoru L nad tělesem $\mathbb{R}$ a souřadnice vektoru $\vec{z}$ vůči této bázi jsou $\mathrm{coord}_B(\vec{z}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Určete souřadnice vektoru $\vec{z}$ vůči bázi $C = (\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ a jeho souřadnice vůči bázi $D = (2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{v})$.

Výsledky

1. B je báze, neboť obsahuje $3 = \dim \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé vektory, $\mathrm{coord}_B(\vec{z}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $M = \{P(x) = ax^3 + cx;\ a, c \in \mathbb{R}\}$ je podprostor (je uzavřená na sčítání a číselné násobky), má bázi $B = \{x^3, x\}$, $\dim M = 2$.

3. $\mathrm{coord}_C(\vec{z}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\mathrm{coord}_D(\vec{z}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$