Domácí úkol č. 7 - Lineární zobrazení a jejich matice

Požadavky

- Definice a odpovědi pište českou (či slovenskou) větou či větami, nikoli matematickými symboly.
- U výpočtů pište aspoň drobné komentáře.
- U teoretických otázek každé své tvrzení řádně zdůvodněte, samotná správná odpověď nestačí.
- K úspěchu je nutné získat aspoň polovinu z celkového počtu bodů.

Příklady

1. (10 bodů) Jsou dána lineární zobrazení f a g:

   $$f : R^2 \to R^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad g : R^3 \to R^2 : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ 2y_1 - y_3 \end{pmatrix}$$

   a) Napište matici složeného zobrazení $\varphi = f \circ g$ vzhledem ke standardním bázím, použijte k tomu matice jednotlivých zobrazení f a g. Pozn. $\varphi : R^3 \to R^3 : \vec{z} \mapsto f(g(\vec{z}))$

   b) Nalezněte jádro zobrazení φ. Určete defekt i hodnost zobrazení φ.

   c) Je zobrazení φ monomorfismus?

2. (10 bodů) Lineární zobrazení $g : \mathbb{R}^{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 1}[x]$ je zadáno svými výsledky na bázi:

   $$g(x + 1) = x + 2, \quad g(2x + 1) = 3x$$

   a) Zdůvodněte, proč je seznam $C = (x+1, 2x+1)$ bází lineárního prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše 1.

   b) Spočtěte $g(5x + 2)$.

   c) Napište matici zobrazení g vzhledem ke standardní bázi $B = (x, 1)$ (tj. bázi B volíme v prostoru vzorů i v prostoru obazů). Nakreslete si k tomu komutativní diagram z definice matice zobrazení vzhledem k daným bázím.

   d) Nalezněte matici transformace souřadnic $\mathbb{T}_{B \mapsto C}$, kde $B = (x, 1)$.

Výsledky

1. a) $\mathbb{A}_\varphi = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

   b) $\ker(\varphi) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}), \mathrm{def}(\varphi) = 1, \mathrm{rank}(\varphi) = 2,$

   c) φ není monomorfismus

2. a) seznam C obsahuje 2 lineárně nezávislé vektory v prostoru dimenze 2

   b) $g(5x + 2) = 8x - 2,$

   c) $\mathbb{A}_g = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

   d) $\mathbb{T}_{B \mapsto C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$