Příklady na formalizaci matematických vět

V následujícím textu se budeme zabývat formalizací matematických vět, tedy příklady typu: *Najděte formuli predikátové logiky, která má ve vhodné interpretaci následující význam: "..." Jazyk a zvolenou interpretaci popište.*

Nejprve vybereme vhodné universum. Mělo by být dostatečně "velké", aby obsahovalo všechny objekty, o kterých se v tvrzení mluví. Pokud ho ale zvolíme "příliš velké", formule se trochu zesložití, protože z tohoto universa budeme muset vybírat jen některé prvky. To samozřejmě ovlivní jazyk, neboť budeme potřebovat víc predikátových symbolů. Pak si rozmyslíme, jestli budeme potřebovat nějaké konstanty, funkční symboly (vyskytují-li se v tvrzení nějaké operace), predikátové symboly (většinou arity 1 pro vlastnosti objektů nebo 2 pro vztahy mezi objekty). Zároveň tyto symboly interpretujeme. Pak vytvoříme požadovanou formuli a "přečteme" (resp. "přepíšeme") ji ve zvolene interpretaci, abychom se ujistili, že má požadovaný význam.

Na co si dát pozor. Uvědomte si, že operace je vždy definovaná pro všechny prvky dané množiny. To znamená, že interpretovaný funkční symbol musí být definován pro všechny prvky (uspořádané n-tice prvků) z universa. Nelze tedy použít třeba odčítání přirozených čísel, dělení přirozených čísel, dělení celých čísel, ba ani dělení racionálních či reálných čísel, protože nelze dělit nulou. Vyhnout se tomu můžeme třeba tak, že uvažujeme pouze množinu $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, resp. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, nebo operaci "vhodně dodefinujeme".

Poznámka: Při formalizaci nejde o to, zda je uvedené tvrzení pravdivé či nepravdivé. Není třeba se tím zabývat.

Ještě malé dovysvětlení. Cílem takovýchto příladů je, abyste dokázali vytvořit syntakticky správné formule. Leckdy lze tu požadovanou formuli napsat velmi jednoduše jako např. $\forall x P(x)$ nebo $\forall x \exists y P(x,y)$ apod., kde "vhodně" interpretujeme predikátový symbol P. Například větu *"Ke každému reálnému číslu lze najít reálné číslo takové, že druhá mocnina jejich součtu není kladná."* můžeme formalizovat jako $\forall x P(x)$. Za universum zvolíme množinu reálných čísel a predikátový symbol P interpretujeme jako množinu reálných čísel, ke kterým lze najít reálné číslo takové, že druhá mocnina jejich součtu není kladná. To ale neplní zmíněný cíl, takže se proti tomu bráníme různými způsoby, jako třeba požadavkem, abyste ve formuli použili daný funkční symbol či konstantu, ke každému pojmu zavedli nový symbol apod. V následujících příkladech si ukážeme možná, ale ne jediná řešení. Můžete vymyslet další.

1. příklad: Najděte formuli predikátové logiky, která má ve vhodné interpretaci následující význam:
Součet každých dvou lichých prvočísel je sudé číslo.
Ve formuli použijte binární funkční symbol f a interpretujte ho jako součet dvou přirozených čísel. Popište použitý jazyk a interpretaci, ve které má formule požadovaný význam. Přepište formuli ve zvolené interpretaci.

Řešení: Protože je zadáno, že f má být interpretováno jako součet dvou *přirozených* čísel, musíme zvolit za universum přirozená čísla. V tvrzení se nevyskytuje žádná konstanta, operace je jediná, totiž ten součet. Vlastnosti jsou tři - být sudé číslo, být liché číslo, být prvočíslo. Budeme tedy potřebovat tři predikátové symboly - S, který budeme interpretovat jako "být sudé číslo", L, který budeme interpretovat jako "být liché číslo", a P, který budeme interpretovat jako "být prvočíslo". Protože se tvrzení týká dvou přirozených čísel, budeme potřebovat (alespoň) dvě proměnné, třeba x a y. Kdyby během vytváření formule byla potřebná další proměnná, ještě ji přidáme. Protože se v tvrzení mluví o "každých dvou číslech", použijeme všeobecné kvantifikátory. Nyní popíšeme jazyk a zvolenou interpretaci:

jazyk	interpretace
	$U = \mathbb{N}$
$Var = \{x, y\}$	
$Const = \emptyset$	
$Func = \{f\}$	
$ar(f) = 2$	$[\![f]\!] : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, \quad [\![f]\!](m,n) = m + n$
$Pred = \{L, S, P\}$	
$ar(L) = 1$	$[\![L]\!] = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ je liché prvočíslo}\}$
$ar(S) = 1$	$[\![S]\!] = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ je sudé číslo}\}$
$ar(P) = 1$	$[\![P]\!] = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ je prvočíslo}\}$

Hledaná sentence je $\forall x \forall y ((L(x) \wedge P(x) \wedge L(y) \wedge P(y)) \Rightarrow S(f(x,y)))$

Přepsání formule ve zvolené interpretaci: Pro všechna přirozená čísla x a y platí: Jestliže x je liché a prvočíslo a y je liché a prvočíslo, potom $x + y$ je sudé číslo.

Vlastnosti "být liché číslo" a "být prvočíslo" můžeme spojit do jediné, totiž "být liché prvočíslo". V tomto případě budeme potřebovat jen dva predikátové symboly - S, který budeme interpretovat jako být sudé číslo, a L, který budeme interpretovat jako být liché prvočíslo. Jazyk, interpretace a formule budou takovéto:

jazyk	interpretace
	$U = \mathbb{N}$
$Var = \{x, y\}$	
$Const = \emptyset$	
$Func = \{f\}$	
$ar(f) = 2$	$[\![f]\!] : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, \quad [\![f]\!](m, n) = m + n$
$Pred = \{L, S, P\}$	
$ar(L) = 1$	$[\![L]\!] = \{n \in \mathbb{N}; n$ je liché prvočíslo$\}$
$ar(S) = 1$	$[\![S]\!] = \{n \in \mathbb{N}; n$ je sudé číslo$\}$

Hledaná sentence je $\forall x \forall y((L(x) \wedge L(y)) \Rightarrow S(f(x, y)))$

Přepsání formule ve zvolené interpretaci: Pro všechna přirozená čísla x a y platí: Jestliže x je liché prvočíslo a y je liché prvočíslo, potom $x + y$ je sudé číslo.

2. příklad: Najděte formuli predikátové logiky, která má ve vhodné interpretaci následující význam:
Každé složené přirozené číslo je dělitelné přirozeným číslem větším než jedna.
Ve formuli použijte symbol pro konstantu c a interpretujte ho jako číslo jedna. Popište použitý jazyk a interpretaci, ve které má formule požadovaný význam. Přepište formuli ve zvolené interpretaci.

Řešení: Tvrzení je o přirozených číslech, za universum tedy zvolíme množinu přirozených čísel. Je tam použita konstanta 1, není použita žádná operace. Vlastnost je "být složeným číslem" (tomu bude odpovídat unární predikátový symbol S), vztah "dělitelnosti" (binární predikátový symbol D) a vztah "být větší než" (binární predikátový symbol V). Budeme potřebovat (alespoň) dvě proměnné, třeba x a y. Opět se mluví o "každém" přirozeném čísle (všeobecný kvantifikátor), které je dělitelné přirozeným číslem. Otázka je, zda "každým" nebo "nějakým". I když to tam explicitně napsáno není, zřejmě se myslí "nějakým". Tomu odpovídá existenční kvantifikátor.

jazyk	interpretace
	$U = \mathbb{N}$
$Var = \{x, y\}$	
$Const = \{c\}$	$[\![c]\!] = 1$
$Func = \emptyset$	
$Pred = \{S, D, V\}$	
$ar(S) = 1$	$[\![S]\!] = \{m \in \mathbb{N}; m$ je složené číslo$\}$
$ar(D) = 2$	$[\![D]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2;$ číslo m je dělitelné číslem $n\}$
$ar(V) = 2$	$[\![V]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2; m > n\}$

Hledaná sentence je $\forall x(S(x) \Rightarrow \exists y(V(y, c) \wedge D(x, y)))$

Přepsání formule ve zvolené interpretaci: Pro všechna přirozená čísla x platí: Jestliže x je složené číslo, potom existuje přirozené číslo y takové, že $y > 1$ a číslo x je dělitelné číslem y.

3. příklad: Najděte formuli predikátové logiky, která má ve vhodné interpretaci následující význam:
Přirozené číslo je prvočíslem právě tehdy, když je dělitelné pouze sebou samým a číslem jedna.
Ve formuli použijte symbol pro konstantu c a interpretujte ho jako číslo jedna. Popište použitý jazyk a interpretaci, ve které má formule požadovaný význam. Přepište formuli ve zvolené interpretaci.

Řešení: Tvrzení je o přirozených číslech, za universum tedy zvolíme množinu přirozených čísel. Je tam použita konstanta 1, není použita žádná operace. Vlastnost je "být prvočíslem" (tomu bude odpovídat unární predikátový symbol P) vztah je "dělitelnost" (binární predikátový symbol D). Budeme potřebovat dvě proměnné, třeba x a y. Věta říká, že prvočíslo je dělitelné **pouze** sebou samým a číslem jedna. To vlastně znamená, že je dělitelné samo sebou a číslem jedna, ale není dělitelné ničím jiným. Tedy žádné jiné číslo už ho nedělí. To můžeme vyjádřit vícero způsoby, některé si ukážeme.

jazyk	interpretace
	$U = \mathbb{N}$
$Var = \{x, y\}$	
$Const = \{c\}$	$[\![c]\!] = 1$
$Func = \emptyset$	
$Pred = \{P, D, R\}$	
$ar(P) = 1$	$[\![P]\!] = \{m \in \mathbb{N}; m \text{ je prvočíslo}\}$
$ar(D) = 2$	$[\![D]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2; \text{číslo } m \text{ je dělitelné číslem } n\}$
$ar(R) = 2$	$[\![R]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2; m = n\}$

Hledaná sentence je např. $\forall x(P(x) \Leftrightarrow (D(x, x) \wedge D(x, c) \wedge \forall y(D(x, y) \Rightarrow (R(y, x) \vee R(y, c)))))$

Přepsání formule ve zvolené interpretaci: Pro všechna přirozená čísla x platí: x je prvočíslo právě tehdy, když je dělitelné sebou samým a je dělitelné číslem jedna a pro všechna přirozená čísla y platí, že pokud y dělí číslo x, potom je $y = x$ nebo $y = 1$.

Ukážeme i další možnosti požadované sentence, přičemž zachováme jazyk a interpretaci uvedené výše. Přepsání ve zvolené interpretaci si doplňte sami.

$$\forall x(P(x) \Leftrightarrow (D(x, x) \wedge D(x, c) \wedge \forall y((\neg R(y, x) \wedge \neg R(y, c)) \Rightarrow \neg D(x, y))))$$

$$\forall x(P(x) \Leftrightarrow (D(x, x) \wedge D(x, c) \wedge \neg \exists y(\neg R(y, x) \wedge \neg R(y, c) \wedge D(x, y))))$$

Můžeme také interpretovat R jako nerovnost, tím se vyhneme negacím před tímto predikátovým symbolem.

V predikátové logice s rovností nemusíme predikátový symbol R zavádět a interpretovat, neboť tato logika obsahuje symbol "=", který vždy interpretujeme jako rovnost dvou prvků. První sentence by pak vypadala takto:

$$\forall x(P(x) \Leftrightarrow (D(x, x) \wedge D(x, c) \wedge \forall y(D(x, y) \Rightarrow (y = x \vee y = c))))$$

Možná nejjednodušší formuli získáme, když se zamyslíme nad významem slova **pouze**. To, že číslo x je dělitelné **pouze** sebou samým nebo číslem jedna, vlastně znamená, že jakékoli přirozené číslo ho dělí tehdy a jen tehdy, když je rovno x nebo jedné. Formule tady může být zapsána jako

$$\forall x(P(x) \Leftrightarrow \forall y(D(x, y) \Leftrightarrow (R(y, x) \vee R(y, c))))$$

V predikátové logice s rovností pak

$$\forall x(P(x) \Leftrightarrow \forall y(D(x, y) \Leftrightarrow (y = x \vee y = c)))$$

4. příklad: Najděte formuli predikátové logiky, která má ve vhodné interpretaci následující význam:
Kladné reálné číslo je racionální, jestliže ho lze zapsat jako podíl dvou (kladných) přirozených čísel.
Ve formuli použijte binární funkční symbol f a interpretujte ho jako podíl dvou kladných reálných čísel. Popište použitý jazyk a interpretaci, ve které má formule požadovaný význam. Přepište formuli ve zvolené interpretaci.

Řešení: Protože se má v sentenci použít binární funkční symbol f, který se má interpretovat jako podíl dvou kladných reálných čísel, musí být universem množina kladných reáných čísel $\mathbb{R}^+$. Tato volba by byla nejlepší i v případě, že by toto nebylo požadováno. Jak bylo uvedeno výše, nelze použít podíl dvou reálných čísel, protože nelze dělit nulou. Šlo by použít množinu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ale pak bychom museli použít predikátový symbol, který by z této množiny vybíral pouze kladná čísla. Budeme dále (kromě funkčního symbolu f) potřebovat ještě unární predikátové symboly Q pro "být racionálním číslem" a N pro "být přirozeným číslem" a binární predikátový symbol pro rovnost (např. R, v případě logiky s rovností tento symbol nepotřebujeme).

Další problém může být formulace věty. Je to implikace, ale oproti běžnému tvaru "jestliže *předpoklad*, potom *závěr*", je tady "*závěr*, jestliže *předpoklad*". Předpokladem tedy je, že lze číslo zapsat jako podíl dvou přirozených čísel, a závěr je, že je toto číslo racionální.

jazyk	interpretace
	$U = \mathbb{R}^+$
$Var = \{x, y, z\}$	
$Const = \emptyset$	
$Func = \{f\}$	
$ar(f) = 2$	$[\![f]\!] : (\mathbb{R}^+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad [\![f]\!](m, n) = \frac{m}{n}$
$Pred = \{Q, N, R\}$	
$ar(Q) = 1$	$[\![Q]\!] = \{m \in \mathbb{R}^+; m \in \mathbb{Q}\}$
$ar(N) = 1$	$[\![N]\!] = \{m \in \mathbb{R}^+; m \in \mathbb{N}\}$
$ar(R) = 2$	$[\![R]\!] = \{(m, n) \in (\mathbb{R}^+)^2; m = n\}$

Hledaná sentence je např. $\forall x(\exists y \exists z(N(y) \wedge N(z) \wedge R(x, f(y, z))) \Rightarrow Q(x))$

V predikátové logice s rovností $\forall x(\exists y \exists z(N(y) \wedge N(z) \wedge x = f(y, z)) \Rightarrow Q(x))$

Přepsání formule ve zvolené interpretaci: Pro všechna kladná reálná čísla x platí: jestliže existují kladná reálná čísla y a z taková, že $y \in \mathbb{N}$ a $z \in \mathbb{N}$ a $x = \frac{y}{z}$, potom je $x \in \mathbb{Q}$.

5. příklad: Najděte formuli predikátové logiky, která má ve vhodné interpretaci následující význam:
Ke každým dvěma různým přirozeným číslům lze najít prvočíslo, které je větší než jejich součin.
Ve formuli použijte binární funkční symbol f a interpretujte ho jako součin dvou přirozených čísel. Popište použitý jazyk a interpretaci, ve které má formule požadovaný význam. Přepište formuli ve zvolené interpretaci.

Řešení: Budeme postupovat rychleji. Universem budou přirozená čísla, funkční symbol a jeho interpretace jsou zadány, budeme potřebovat unární predikátový symbol pro "být prvočíslem" (např. P), binární predikátový symbol pro "být větší" (např V) a také binární predikátový symbol pro "různost" (příp. pro rovnost, který bychom negovali). V zadání je totiž, že čísla mají být **různá**, a k tomu nestačí, že je různě pojmenujeme.

jazyk	interpretace
	$U = \mathbb{N}$
$Var = \{x, y, z\}$	
$Const = \emptyset$	
$Func = \{f\}$	
$ar(f) = 2$	$[\![f]\!] : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, \quad [\![f]\!](m, n) = m \cdot n$
$Pred = \{P, V, R\}$	
$ar(P) = 1$	$[\![P]\!] = \{m \in \mathbb{N}; m \text{ je prvočíslo}\}$
$ar(V) = 2$	$[\![D]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2; m > n\}$
$ar(R) = 2$	$[\![R]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2; m \neq n\}$

Hledaná sentence je např. $\forall x \forall y(R(x, y) \Rightarrow \exists z(P(z) \wedge V(z, f(x, y))))$

Přepsání formule ve zvolené interpretaci: Pro všechna přirozená čísla x a y platí: Jestliže $x \neq y$, potom existuje přirozené číslo z, které je prvočíslem a platí $z > x \cdot y$.

V predikátové logice s rovností bychom opět nemuseli použít predikátový symbol R pro "různost", s využitím rovnosti by formule vypadala takto:

$$\forall x \forall y(\neg(x = y) \Rightarrow \exists z(P(z) \wedge V(z, f(x, y))))$$

Několik dalších příkladů je určeno k vlastnímu procvičování.

6. příklad: Najděte formuli predikátové logiky, která má ve vhodné interpretaci následující význam:
Ke každému iracionálnímu číslu lze najít kladné reálné číslo takové, že druhá mocnina jejich součtu je přirozené číslo.
Ve formuli použijte binární funkční symbol f a interpretujte ho jako součet dvou reálných čísel. Popište použitý jazyk a interpretaci, ve které má formule požadovaný význam. Přepište formuli ve zvolené interpretaci.

7. příklad: Najděte formuli predikátové logiky, která má ve vhodné interpretaci následující význam:
Pro každé přirozené číslo x lze nalézt jiná dvě přirozená čísla taková, že součet jejich druhých mocnin je roven třetí mocnině čísla x.

Ve formuli použijte binární funkční symbol f a interpretujte ho jako součet dvou přirozených čísel. Popište použitý jazyk a interpretaci, ve které má formule požadovaný význam. Přepište formuli ve zvolené interpretaci.

8. příklad: Najděte formuli predikátové logiky, která má ve vhodné interpretaci následující význam:
Existuje právě jedno sudé prvočíslo.
Za universum zvolte množinu přirozených čísel. Popište použitý jazyk a interpretaci, ve které má formule požadovaný význam. Přepište formuli ve zvolené interpretaci.

9. příklad: Najděte formuli predikátové logiky, která má ve vhodné interpretaci následující význam:
Jestliže je součet čtverců libovolných dvou různých přirozených čísel dělitelný dvěma, je jejich součin dělitelný čtyřmi.
Ve formuli použijte binární funkční symbol f a interpretujte ho jako součet dvou přirozených čísel. Popište použitý jazyk a interpretaci, ve které má formule požadovaný význam. Přepište formuli ve zvolené interpretaci.

10. příklad: Najděte formuli predikátové logiky, která má ve vhodné interpretaci následující význam:
Součin libovolných dvou sudých celých čísel je sudé přirozené číslo.
Ve formuli použijte binární funkční symbol f a interpretujte ho jako součin dvou celých čísel. Popište použitý jazyk a interpretaci, ve které má formule požadovaný význam. Přepište formuli ve zvolené interpretaci.