

Výroková logika

1. přednáška z LGR

Obsah

- 1 Syntaxe výrokové logiky**
 - Formule výrokové logiky
 - Rovnost formulí

- 2 Sémantika výrokové logiky**
 - Pravdivostní ohodnocení
 - Tautologicky ekvivalentní formule
 - Další logické spojky

Syntaxe výrokové logiky

Slang: Výroková logika studuje pouze logické spojky. Jednoduché výroky označuje jako logické proměnné.

Výrok je oznamovací věta, o jejíž pravdivosti lze rozhodnout. Pokud výrok formálně zapíšeme, vznikne tzv. formule. Syntaxe se zabývá tím, jak výrok správně formálně zapsat, do syntaxe patří též odvozovací systémy. Sémantika řeší pravdivost výroků, zde pouze vzhledem k použitým logickým spojkám. Důležitým pojmem bude sémantický důsledek a jeho testování pomocí resoluční metody.

Syntaxe výrokové logiky

Jazyk výrokové logiky obsahuje tyto symboly:

- logické proměnné - množina A logických proměnných musí být neprázdná; pro tuto přednášku budiž $A = \{a, b, c\}$
- logické spojky - základní sada je $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, kde \neg je NOT, \wedge je AND, \vee je OR, \Rightarrow je IF..THEN, \Leftrightarrow je IF AND ONLY IF (IFF)
- závorky

Poznámka

V literatuře najdete i jiná značení, jako např. $\&$ je AND, \rightarrow je IF, \leftrightarrow je IFF.

Syntaxe výrokové logiky

Definice

Je dána množina logických proměnných $A \neq \emptyset$.

Formule výrokové logiky je definována induktivně těmito pravidly:

- ① Každá logická proměnná je formule, tzv. *atomická formule*.
- ② Jsou-li α, β formule, pak také $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ a $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jsou formule.
- ③ Každá formule vznikla použitím konečně mnoha kroků 1 a 2.

Množinu všech formulí s proměnnými z A označíme $Fle(A)$.

Otázka

Jsou řetězce $\psi = (b \Rightarrow a \vee c)$ a $\varphi = (\neg b \Rightarrow a) \vee c$ formule?

Syntaxe výrokové logiky

Relaxace z definice

- Nebudeme psát vnější závorky kolem formule.
- Nebudeme psát závorky kolem negace ("negace váže silněji než ostatní spojky").

Řetězec odpovídající relaxované definici budeme považovat za formuli. Relaxovaný tvar je příjemnější pro člověka a pro počítač jsme schopni závorky jednoznačně doplnit.

Příklad

Řetězec $\varphi = (((\neg b) \Rightarrow a) \vee c)$ tvoří formuli
a řetězec $\varphi = (\neg b \Rightarrow a) \vee c$ je jejím relaxovaným tvarem.

Syntaxe výrokové logiky

Definice

Syntaktický strom formule je kořenový strom, který zachycuje, jak formule vznikla. Induktivně je definován takto:

- Je-li formule atomická, pak její syntaktický strom má jediný vrchol označený příslušnou logickou proměnnou.
- Je-li formule tvaru $\neg\alpha$, pak její syntaktický strom má v kořeni spojku \neg , jeho jediným následníkem je kořen podstromu pro α .
- Je-li formule tvaru $\alpha \circ \beta$, kde \circ značí některou z binárních logických spojek, pak její syntaktický strom má v kořeni spojku \circ , jeho levým následníkem je kořen podstromu pro α , jeho pravým následníkem je kořen podstromu pro β .

Syntaxe výrokové logiky

Poznámka

Každé formuli odpovídá jediný syntaktický strom. Jde o různé datové struktury pro práci s formulemi: *STRING* a *TREE*
Přitom struktura *TREE* je mnohem praktičtější.

Výzva: Zkuste si rozmyslet rekurzivní algoritmus, který formuli, která je na vstupu zapsána jako řetězec (nerelaxovaný, tj. se všemi závorkami), uloží do paměti jako binární strom.

Poznámka

Podformule formule φ odpovídají podstromům syntaktického stromu pro φ , jež mají v kořeni kterýkoliv vrchol stromu a dále obsahují všechny potomky tohoto vrcholu.

Syntaxe výrokové logiky

Definice

Rovnost formulí: Dvě formule jsou si rovny, pokud tvoří stejný řetězec (v nerelaxovaném tvaru), aneb pokud jim odpovídá stejný syntaktický strom.

Příklad

$a \neq \neg\neg a$, $a \vee b \neq b \vee a$ (neplatí syntaktická komutativita \vee)

Důsledek

Existuje nekonečně mnoho formulí (i nad konečnou neprázdnou množinou logických proměnných).

Sémantika výrokové logiky

Sémantika výrokové logiky řeší otázku pravdivosti formulí vzhledem k pravdivosti atomických formulí a k použitým logickým spojkám.

Budeme značit *pravdu* jako **1** a *nepravdu* jako **0**.

Známe-li pravdivost/nepravdivost atomických formulí, je tím určeno zobrazení $u: A \rightarrow \{0, 1\}$. (Jak ji zjistíme, to je záležitost vnějšího světa, např. fyzikálním měřením.)

Podle významu logických spojek, můžeme pak jednoznačně určit pravdivost/nepravdivost každé formule, aneb rozšířit zobrazení u na celou množinu $Fl(A)$.

Sémantika výrokové logiky

Sémantika logických spojek

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Poznámka

Implikaci $\alpha \Rightarrow \beta$ lze chápat jako slib: Nastane-li α , tak udělám β . Implikace je nepravdivá pouze tehdy, když jsme slib nesplnili.

Sémantika výrokové logiky

Definice

Pravdivostní ohodnocení u je zobrazení $u: Fle(A) \rightarrow \{0, 1\}$ respektující sémantiku logických spojek, aneb splňující:

- $u(\neg\alpha) = 1$ právě tehdy, když $u(\alpha) = 0$.
- $u(\alpha \wedge \beta) = 1$ právě tehdy, když $u(\alpha) = u(\beta) = 1$.
- $u(\alpha \vee \beta) = 0$ právě tehdy, když $u(\alpha) = u(\beta) = 0$.
- $u(\alpha \Rightarrow \beta) = 0$ právě tehdy, když $u(\alpha) = 1$ and $u(\beta) = 0$.
- $u(\alpha \Leftrightarrow \beta) = 1$ právě tehdy, když $u(\alpha) = u(\beta)$.

$u(\alpha) = 1$ znamená, že *formule α je pravdivá v ohodnocení u* ,
 $u(\alpha) = 0$ znamená, že *formule α je nepravdivá v ohodnocení u* .

Sémantika výrokové logiky

Tvrzení

Každé pravdivostní ohodnocení $u : Fle(A) \rightarrow \{0, 1\}$ je jednoznačně určeno svými hodnotami na atomických formulích $a \in A$.

Důsledek

Je-li n atomických formulí, pak počet všech různých pravdivostních ohodnocení je 2^n .

Pravdivostní hodnoty formule o n logických proměnných ve všech různých ohodnoceních lze zapsat do tabulky o 2^n řádcích. Každý řádek reprezentuje jiné ohodnocení.

Sémantika výrokové logiky

Definice

Formule se nazývá

- *splnitelná formule*, jestliže je pravdivá aspoň v jednom ohodnocení,
- *tautologie*, jestliže je pravdivá ve všech ohodnoceních,
- *kontradikce*, jestliže není pravdivá v žádném ohodnocení.

Příklad

Formule $\varphi = (\neg b \Rightarrow a) \vee c$ je splnitelná, protože je pravdivá např. v ohodnocení u daném hodnotami $u(a) = u(b) = u(c) = 1$. Toto ohodnocení u dosvědčuje splnitelnost formule φ .

Formule φ však není tautologie, svědkem je ohodnocení \tilde{u} dané hodnotami $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = \tilde{u}(c) = 0$, v němž je $\tilde{u}(\varphi) = 0$.

Sémantika výrokové logiky

Definice

Řekneme, že formule φ a ψ jsou *tautologicky ekvivalentní* (*sémanticky ekvivalentní*), jestliže pro každé ohodnocení u platí: $u(\varphi) = u(\psi)$. Značíme $\varphi \vDash \psi$.

Poznámka

Tautologicky ekvivalentní formule mají stejný sloupeček v tabulce pravdivostních hodnot, určují tedy stejnou booleovskou funkci. Libovolná funkce n proměnných z $\{0, 1\}^n$ do $\{0, 1\}$ se nazývá *booleovská funkce*.

Sémantika výrokové logiky

Tvrzení

Pro každé dvě formule α a β platí:

$\alpha \vDash \beta$ právě tehdy, když je formule $\alpha \Leftrightarrow \beta$ tautologie.

Tvrzení

Jsou-li α , β , γ a δ formule splňující $\alpha \vDash \gamma$ a $\beta \vDash \delta$, pak platí

- $\neg\alpha \vDash \neg\gamma$
- $(\alpha \circ \beta) \vDash (\gamma \circ \delta)$, kde \circ označuje libovolnou binární spojku.

Aneb tautologická ekvivalence respektuje logické spojky.
Můžeme substituovat podformule za tautologicky ekvivalentní podformule a neporušíme tautologickou ekvivalenci.

Sémantika výrokové logiky

Tvrzení

Pro každé formule α , β a γ platí:

- $\alpha \wedge \alpha \vDash \alpha$, $\alpha \vee \alpha \vDash \alpha$ (sémantická idempotence \wedge a \vee)
- $\alpha \wedge \beta \vDash \beta \wedge \alpha$, $\alpha \vee \beta \vDash \beta \vee \alpha$ (sém. komutativita \wedge a \vee)
- $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \vDash (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$, $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \vDash (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$
(sémantická asociativita \wedge a \vee)
- $\alpha \wedge (\beta \vee \alpha) \vDash \alpha$, $\alpha \vee (\beta \wedge \alpha) \vDash \alpha$ (sém. absorpce \wedge a \vee)
- $\neg\neg\alpha \vDash \alpha$
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \vDash \neg\alpha \vee \neg\beta$,
 $\neg(\alpha \vee \beta) \vDash \neg\alpha \wedge \neg\beta$ (De Morganovy zákony)
- $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \vDash (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$,
 $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \vDash (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ (sém. distributivní zákony)

Sémantika výrokové logiky

Tvrzení-pokračování

- $\alpha \Rightarrow \beta \vDash \neg\alpha \vee \beta$
- $\alpha \Rightarrow \beta \vDash \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$ (obměněná implikace)
- $\alpha \Leftrightarrow \beta \vDash (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$

Další relaxace z definice formule

Pokud bude (pod)formule obsahovat pouze opakující se spojku \wedge (resp. pouze \vee), nemusíme v ní psát závorky.

Syntaktický strom takové formule bude obsahovat vrchol se spojkou \wedge (resp. \vee) mající patřičný počet následníků.

Např. $\varphi = (a \vee b \vee c) \wedge a$ je formule s logickými proměnnými a, b, c .

Syntaxe a sémantika výrokové logiky

Tvrzení

Tautologická ekvivalence je relace ekvivalence na množině všech formulí $Fl_e(A)$, která rozdělí formule celkem do $2^{(2^n)}$ různých tříd, kde $n = |A|$ je počet logických proměnných.

Další logické spojky

Logická spojka je dána svojí sémantikou. Mohli bychom pro každý sloupec délky 2^n v tabulce pravdivostních ohodnocení zavést logickou spojku arity n .

Běžně se používají binární spojky \mid NAND (Shefferova čárka), \downarrow NOR (Peirceova šipka) a \oplus XOR (vylučovací nebo) a dále nulární spojky TRUE - značíme tt a FALSE - značíme ff .

Syntaxe a sémantika výrokové logiky

Další logické spojky

Sémantika nových spojek je určena následující tabulkou:

ff	tt	α	β	$\alpha \mid \beta$	$\alpha \downarrow \beta$	$\alpha \oplus \beta$
0	1	0	0	1	1	0
		0	1	1	0	1
		1	0	1	0	1
		1	1	0	0	0

Poznámka

Zkuste přiřadit značku pro logickou spojku každému sloupečku v tabulce o dvou logických proměnných (sloupečků je $2^4 = 16$). Kromě už zavedených logických spojek by mělo stačit \Leftarrow , \nLeftarrow , \nRightarrow .

Syntaxe a sémantika výrokové logiky

Tvrzení

Pro libovolné formule α, β platí:

- $\alpha \mid \beta \Vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$
- $\alpha \downarrow \beta \Vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
- $\alpha \oplus \beta \Vdash (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta) \Vdash \neg(\alpha \Leftrightarrow \beta)$

Tvrzení

Pro libovolnou formuli α platí:

- $\text{tt} \Vdash \neg \text{ff}$
- $\text{tt} \wedge \alpha \Vdash \alpha, \text{tt} \vee \alpha \Vdash \text{tt},$
 $\text{ff} \wedge \alpha \Vdash \text{ff}, \text{ff} \vee \alpha \Vdash \alpha$
- $\alpha \wedge \neg\alpha \Vdash \text{ff}, \alpha \vee \neg\alpha \Vdash \text{tt}$

Syntaxe a sémantika výrokové logiky

Zobecněná definice formule

Je dána množina logických proměnných $A \neq \emptyset$.

Formule výrokové logiky je definována induktivně těmito pravidly:

- 1 Každá logická proměnná je formule, tzv. *atomická formule*.
- 2 Jsou-li α, β formule, pak také $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$, $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$, $(\alpha \mid \beta)$, $(\alpha \downarrow \beta)$, $(\alpha \oplus \beta)$ jsou formule. Také \top , \perp jsou formule.
- 3 Každá formule vznikla použitím konečně mnoha kroků 1 a 2.

Zobecněná definice pravdivostního ohodnocení

Pravdivostní ohodnocení u je zobrazení $u: Fle(A) \rightarrow \{0, 1\}$ respektující sémantiku všech logických spojek.

Syntaxe a sémantika výrokové logiky

Literatura

- J. Velebil: Velmi jemný úvod do matematické logiky. Kapitoly 1 a 2.1.
<ftp://math.feld.cvut.cz/pub/velebil/y01mlo/logika.pdf>
- M. Demlová, B. Pondělíček: Matematická logika, ČVUT Praha, 1997. Kapitoly 5 a 6.
- L. Nentvich: Algoritmus na rozpoznávání formulí VL.
<http://math.feld.cvut.cz/gollova/lgr/fle.pdf>