Přirozená dedukce

5. a 6. přednáška z LGR

Obsah

Přirozená dedukce

Formální důkazové systémy

Formální důkazové systémy výrokové logiky patří do syntaxe. Nezabývají se pravdivostí formulí, ale odvoditelností formulí z jiných formulí.

Je ovšem žádoucí, aby odvoditelnost respektovala pravdivost (= korektní systém), v lepším případě, aby se odvoditelnost shodovala s pravdivostí, tj. aby bylo možné odvodit právě všechny sémantické důsledky (= úplný systém).

V žádném případě nechceme, aby šlo odvodit i nepravdivé formule (= příliš agresivní systém), či dokonce všechny formule (= sporný systém).

Přirozená dedukce

Formální důkazové systémy

- Hilbertův systém - Hilbert, Německo, 1908
  Má několik axiomů a málo odvozovacích pravidel,
  pro výrokovou logiku jsou to tři typy axiomů a jedno odvozovací pravidlo (modus ponens).
  Pracuje s formulemi obsahujícími pouze spojky z $\{\neg, \Rightarrow\}$.
- Přirozená dedukce - Gentzen, Německo, kolem 1930
  Nemá axiomy, ale má mnoho odvozovacích pravidel,
  která kopírují přirozené uvažování.

Přirozená dedukce

Základní odvozovací pravidla

Přirozená dedukce pracuje s formulemi, které obsahují základní sadu spojek kromě ekvivalence. (Místo ekvivalence budeme vždy dokazovat obě implikace.)
Dále používá znak $\perp$ pro spor, což je zkratka za jakoukoliv formuli $\varphi \wedge \neg\varphi$, kde φ je formule. (Pokud bychom chtěli, mohli bychom místo sporu pracovat s formulí $\mathbb{ff}$.)

Pro každou spojku jsou v přirozené dedukci dvě pravidla:

- i-pravidlo, které spojku zavádí (introduction rule)
- e-pravidlo, které spojku odstraňuje (elimination rule)

Přirozená dedukce

Základní odvozovací pravidla

spojka	i-pravidlo	e-pravidlo
$\wedge$	$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge_i$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge_{e_1} \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge_{e_2}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\varphi \Rightarrow \psi} \Rightarrow_i$	$\dfrac{\varphi \qquad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi} \Rightarrow_e$ Modus ponens (MP)

Přirozená dedukce

Základní odvozovací pravidla

spojka	i-pravidlo	e-pravidlo
$\vee$	$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \vee_{i_1}$ $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \vee_{i_2}$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \vee_e$

Přirozená dedukce

Základní odvozovací pravidla

spojka	i-pravidlo	e-pravidlo
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\varphi}\ \neg_i$	$\dfrac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\bot}\ \neg_e \qquad \dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ \neg\neg_e$
$\bot$	no i-rule for $\bot$	$\dfrac{\bot}{\varphi}\ \bot_e$

Přirozená dedukce

Definice

Odvození formule φ z formulí v S je konečná posloupnost formulí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ taková, že platí:

- každá formule φ_i je buď formule z množiny S, nebo je to pomocný předpoklad (tj. otevírá box), anebo vznikla z formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$ pomocí některého odvozovacího pravidla přirozené dedukce
- všechny pomocné předpoklady jsou pasivní (tj. všechny boxy jsou uzavřeny)
- $\varphi_k = \varphi$

V odvození budeme psát formule pod sebe a budeme rozsah platnosti pomocných předpokladů vyznačovat rámečky (boxy).

Přirozená dedukce

Definice

Formule φ je *logickým důsledkem* množiny formulí S, jestliže existuje odvození formule φ z formulí v S.
Značíme $S \vdash \varphi$, popř. $\psi \vdash \varphi$, či $\vdash \varphi$.

Příklady

Na přednášce bude dokázáno:

- $a \wedge b \vdash b \wedge a$
- $\vdash a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$
- $\neg a \vee b \vdash a \Rightarrow b$

Přirozená dedukce

Další odvozovací pravidla

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ \neg\neg i$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots\\ \perp\end{array}}}{\varphi}$$ Reductio ad absurdum (RAA)

$$\frac{\neg\psi \qquad \varphi \Rightarrow \psi}{\neg\varphi}$$ Modus tolens (MT)

$$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}$$ Tertium non datur (TND)

Přirozená dedukce

Příklady

Na přednášce bude dokázáno (s použitím pravidel RAA a TND):

- $\neg b \Rightarrow \neg a \vdash a \Rightarrow b$
- $a \Rightarrow b \vdash \neg a \vee b$

Definice

Říkáme, že formule φ a ψ jsou *logicky ekvivalentní*, pokud $\varphi \vdash \psi$ a také $\psi \vdash \varphi$. Značíme $\varphi \dashv\vdash \psi$.

Přirozená dedukce

Věta (syntaktická o kompaktnosti)

Pro libovolnou množinu formulí S a libovolnou formuli φ platí:
$S \vdash \varphi$, právě když existuje konečná $S' \subseteq S$ tak, že $S' \vdash \varphi$.

Věta (syntaktická o dedukci)

Pro libovolnou množinu formulí S a libovolné formule φ a ψ platí:
$S \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, právě když $S \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

Přirozená dedukce

Věta o korektnosti

Pro každou množinu formulí S a formuli φ platí:
Když $S \vdash \varphi$, pak $S \models \varphi$.

Věta o úplnosti

Pro každou množinu formulí S a formuli φ platí:
$S \vdash \varphi$, právě když $S \models \varphi$.

Přirozená dedukce

Definice

Formule φ splňující $\vdash \varphi$ se nazývá *věta* výrokové logiky.
Aneb věty výrokové logiky jsou odvoditelné pravidly přirozené dedukce z prázdné množiny.

Slabá věta o úplnosti

Větami výrokové logiky jsou právě tautologie.
Pro každou formuli φ platí: $\vdash \varphi$, právě když $\models \varphi$.

Přirozená dedukce

Poznámka

Podle věty o úplnosti přirozené dedukce platí:

$S \vdash \varphi$, právě když $S \models \varphi$.
$S \nvdash \varphi$, právě když $S \not\models \varphi$.

Úlohy se zajímavě doplňují v tom smyslu, že vždy jedna je lehčí, máme-li trochu štěstí (nalezneme-li svědka).

Pro $S \vdash \varphi$ stačí najít jedno odvození formule φ z S, zatímco pro $S \models \varphi$ je třeba vyplnit tabulku o 2^n řádcích.

Pro $S \not\models \varphi$ stačí najít jedno ohodnocení u, ve kterém je $u(S) = 1$, ale $u(\varphi) = 0$, zatímco pro $S \nvdash \varphi$ je nutno zjistit, že neexistuje odvození formule φ z S.

Přirozená dedukce

Literatura

- M. Huth, M. Ryan: Logic in Computer Science, Cambridge University Press, 2004. Kapitola 1.2
- M. Demlová, B. Pondělíček: Matematická logika, ČVUT Praha, 1997. Kapitola 9.
- L. Nentvich: Přirozená dedukce - odvozovací pravidla a příklady použití ftp://math.feld.cvut.cz/gollova/lgr/natded.pdf