Přirozená dedukce

dodatek k přednášce z LGR

Obsah

Matematická indukce

Matematická indukce je typ důkazu, který lze použít, dokazujeme-li nějakou vlastnost pro přirozená čísla. Funguje na standardním modelu přirozených čísel, tedy pokud každé přirozené číslo vzniklo tak, že jsme k nule přičetli konečněkrát jedničku.

Analogicky lze pro dokazování vlastností prvků induktivně definované množiny použít strukturální indukci.

Matematická indukce

Princip slabé indukce

Nechť V je vlastnost smysluplná pro přirozená čísla $n \geq n_0$.
Pokud platí obě podmínky:

1. číslo n_0 má vlastnost V;
2. pro každé $n \geq n_0$: když n má vlastnost V, pak také $n+1$ má vlastnost V;

pak každé $n \geq n_0$ má vlastnost V.

Matematická indukce

Princip silné indukce

Nechť V je vlastnost smysluplná pro přirozená čísla $n \geq n_0$.
Pokud platí obě podmínky:

1. číslo n_0 má vlastnost V;
2. pro každé $n \geq n_0$: když každé k, kde $n_0 \leq k \leq n$, má vlastnost V, pak také $n + 1$ má vlastnost V;

pak každé $n \geq n_0$ má vlastnost V.

Matematická indukce

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní na modelu přirozených čísel:

- princip slabé indukce;
- princip silné indukce;
- princip dobrého uspořádání;

Princip dobrého uspořádání

Každá neprázdná podmnožina přirozených čísel má nejmenší prvek.

Matematická indukce

Princip strukturální indukce

Nechť množina M je induktivně definována a nechť V je vlastnost smysluplná pro všechny prvky množiny M.
Pokud platí obě podmínky:

1. všechny prvky vytvořené základními pravidly mají vlastnost V;
2. každé odvozovací pravidlo splňuje: když předpoklady tohoto pravidla mají vlastnost V, pak i závěr má vlastnost V;

pak každý prvek z množiny M má vlastnost V.

Přirozená dedukce

Věta (syntaktická o kompaktnosti)

Pro libovolnou množinu formulí S a libovolnou formuli φ platí:
$S \vdash \varphi$, právě když existuje konečná $S' \subseteq S$ tak, že $S' \vdash \varphi$.

Věta (syntaktická o dedukci)

Pro libovolnou množinu formulí S a libovolné formule φ a ψ platí:
$S \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, právě když $S \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

Přirozená dedukce

Věta (sémantická o kompaktnosti)

Pro libovolnou množinu formulí S a libovolnou formuli φ platí:
$S \models \varphi$, právě když existuje konečná $S' \subseteq S$ tak, že $S' \models \varphi$.

Věta (sémantická o kompaktnosti)

Pro libovolnou množinu formulí S platí: S je nesplnitelná, právě když nějaká její konečná podmnožina $S' \subseteq S$ je nesplnitelná.

Věta (sémantická o dedukci)

Pro libovolnou množinu formulí S a libovolné formule φ a ψ platí:
$S \cup \{\varphi\} \models \psi$, právě když $S \models \varphi \Rightarrow \psi$.

Přirozená dedukce

Věta o korektnosti

Pro každou množinu formulí S a formuli φ platí:

Když $S \vdash \varphi$, pak $S \models \varphi$.

Důkaz

Silnou indukcí podle délky odvození $k \geq 1$ dokážeme, že pro všechna $k \geq 1$ platí vlastnost $V(k)$: "Pro každou S a každou φ, jejichž odvození z S má délku k, platí, že φ je sémantickým důsledkem S".

Přirozená dedukce

Věta o úplnosti

Pro každou množinu formulí S a formuli φ platí:
$S \vdash \varphi$, právě když $S \models \varphi$.

Důkaz

Použijeme syntaktickou i sémantickou větu o kompaktnosti a obě věty o dedukci a převedeme problém na důkaz slabé věty o úplnosti. Nejtěžší část důkazu je schována v sémantické větě o kompaktnosti: S je nesplnitelná, právě když nějaká její konečná podmnožina $S' \subseteq S$ je nesplnitelná.

Přirozená dedukce

Definice

Formule φ splňující $\vdash \varphi$ se nazývá *věta* výrokové logiky.
Aneb věty výrokové logiky jsou odvoditelné pravidly přirozené dedukce z prázdné množiny.

Slabá věta o úplnosti

Větami výrokové logiky jsou právě tautologie.
Pro každou formuli φ platí: $\vdash \varphi$, právě když $\models \varphi$.

Přirozená dedukce

Lemma

Nechť $x_1, \dots, x_n$ jsou všechny logické proměnné ve formuli φ a nechť u je pravdivostní ohodnocení pro tyto proměnné.
Označme $\tilde{x}_i$ literál takový, že
pro $u(x_i) = 1$ je $\tilde{x}_i = x_i$,
pro $u(x_i) = 0$ je $\tilde{x}_i = \neg x_i$.
Pak pokud $u(\varphi) = 1$, tak $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\} \vdash \varphi$
a pokud $u(\varphi) = 0$, tak $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\} \vdash \neg\varphi$.

Důkaz se provede strukturální indukcí podle struktury formule φ.
Z těchto 2^n odvození tautologie φ z literálů jednotlivých řádků tabulky se pak sestaví odvození tautologie bez předpokladů postupným eliminováním globálních předpokladů za pomoci zákona vyloučeného třetího.

Přirozená dedukce

Poznámka

Podle věty o úplnosti přirozené dedukce platí:

$S \vdash \varphi$, právě když $S \models \varphi$.
$S \nvdash \varphi$, právě když $S \not\models \varphi$.

Úlohy se zajímavě doplňují v tom smyslu, že vždy jedna je lehčí, máme-li trochu štěstí (nalezneme-li svědka).

Pro $S \vdash \varphi$ stačí najít jedno odvození formule φ z S, zatímco pro $S \models \varphi$ je třeba vyplnit tabulku o 2^n řádcích.

Pro $S \not\models \varphi$ stačí najít jedno ohodnocení u, ve kterém je $u(S) = 1$, ale $u(\varphi) = 0$, zatímco pro $S \nvdash \varphi$ je nutno zjistit, že neexistuje odvození formule φ z S.

Přirozená dedukce

Literatura

- M. Huth, M. Ryan: Logic in Computer Science, Cambridge University Press, 2004. Kapitola 1.2
- M. Demlová, B. Pondělíček: Matematická logika, ČVUT Praha, 1997. Kapitola 9.
- P. Habala: Diskrétní matematika - Indukce a rekurze. https://math.fel.cvut.cz/cz/lide/habala/teaching/dma/dmknih05.pdf