Odvozovací pravidla přirozené dedukce a příklady použití

Přirozená dedukce má pro každou z logických spojek $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ a $\neg$ dvě odvozovací pravidla. Pro pohodlnější práci rozšíříme množinu logických spojek o nulární spojku $\perp$ (spor) a odpovídajícím způsobem modifikujeme definici formule. I pro spojku $\perp$ máme dvě pravidla. Seznam všech odvozovacích pravidel přirozené dedukce je uveden v tabulce:

	zavedení spojky	*eliminace spojky*
$\vee$	$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \mathrm{i}\vee_1 \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \mathrm{i}\vee_2$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \mathrm{e}\vee$
$\wedge$	$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \mathrm{i}\wedge$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \mathrm{e}\wedge_1 \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ \mathrm{e}\wedge_2$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \Rightarrow \psi}\ \mathrm{i}\Rightarrow$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}\ \mathrm{e}\Rightarrow$
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \perp\end{array}}}{\neg\varphi}\ \mathrm{i}\neg$	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ \mathrm{e}\neg$
$\perp$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}\ \mathrm{i}\perp$	$\dfrac{\perp}{\varphi}\ \mathrm{e}\perp$

Užitečná odvozovací pravidla

(*v závorce za každým pravidlem je číslo příkladu, kde je jeho korektnost dokázána.)*

	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots\\ \perp\end{array}}}{\varphi}$ důkaz sporem (viz 19)	$\dfrac{\neg\psi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\neg\varphi}$ modus tolens (viz 10)
	$\dfrac{}{\varphi \vee \neg\varphi}$ zákon vyloučeného třetího (viz 17)	$\dfrac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$ i$\neg\neg$ (viz 18)

Poznámky k řešeným příkladům. Každý řádek sestává ze tří částí: čísla řádku, odvozené formule a zdůvodnění, jak jsme tuto formuli získali.

Podrobně rozebereme příklad 1.

Chceme odvodit formuli typu $\varphi \Rightarrow \psi$. Jediný způsob, jak tuto formuli odvodit, je dříve či později použít pravidlo pro zavedení implikace i$\Rightarrow$. Toto pravidlo má za pomocný předpoklad formuli φ. Tuto skutečnost vyjádříme tím, že se formule φ objeví jako první v právě vytvořeném rámečku. Proto je na řádku 1 slovo *předpoklad*. Přesnější formulace by byla *předpoklad pravidla* i$\Rightarrow$. Nyní potřebujeme z formule φ získat formuli ψ vyskytující se v závěru odvozované implikace.

Formule $\varphi = p \vee q$ je disjunkcí dvou podformulí. Pokusíme se odvodit z ní formuli $\psi = q \vee p$ použitím eliminačního pravidla pro disjunkci e$\vee$. K tomu potřebujeme nejprve odvození disjunkce $p \vee q$, ale to máme, protože disjunkce na řádku 1 je platná v celém rámečku. Dále potřebujeme odvození disjunkce $q \vee p$ z pomocného předpokladu q a nakonec odvození disjunkce $q \vee p$ z pomocného předpokladu p.

Tato dvě odvození se odehrávají uvnitř dvou vnořených rámečků. Popišme první z nich: na řádku 2 je pomocný předpoklad q druhého pomocného tvrzení odvozovacího pravidla e$\vee$ pro disjunkci. Na řádku 3 je použita první varianta pravidla pro zavedení disjunkce na formuli na řádku 2. Proto je ve třetím sloupci třetího řádku napsáno i$\vee_1$ 2. A tím je odvození formule $q \vee p$ z pomocného předpokladu q hotové, vnořený rámeček je uzavřen. Obdobně pro druhý vnořený rámeček.

Na řádku 6 již máme dostatek informace pro použití eliminačního pravidla pro disjunkci, jsou to konkrétně formule na řádku 1 a první a druhé pomocné pomocné odvození formule $q \vee p$ na řádcích 2–5. Proto je zde ve třetím sloupci napsáno e$\vee$ 1–5.

Protože na řádku 6 je závěr odvozované implikace $\varphi \Rightarrow \psi$, rámeček ukončíme. Nyní použijeme pro zavedení implikace na řádky 1–6, a odvodíme formuli $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$ na řádku 7. Formule na řádku 7 má zdůvodnění i$\Rightarrow$ na řádky 1–6.

1. Napište odvození formule $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$ z prázdné množiny předpokladů.

Řešení.

1.	$p \vee q$	předpoklad
2.	q	předpoklad
3.	$q \vee p$	i$\vee_1$ 2
4.	p	předpoklad
5.	$q \vee p$	i$\vee_1$ 4
6.	$q \vee p$	e$\vee$ 1–5
7.	$(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$	i$\Rightarrow$ 1–6

2. Napište odvození formule $(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p)$ z prázdné množiny předpokladů.

Řešení.

1.	$p \wedge q$	předpoklad
2.	q	e$\wedge_2$ 1
3.	p	e$\wedge_1$ 1
4.	$q \wedge p$	i$\wedge$ 2 a 3
5.	$(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p)$	i$\Rightarrow$ 1–4

3. Napište odvození formule $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ z prázdné množiny předpokladů.

Řešení.

1.	p	předpoklad
2.	q	předpoklad
3.	p	kopie 1
4.	$q \Rightarrow p$	i$\Rightarrow$ 2 a 3
5.	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	i$\Rightarrow$ 1–4

4. Napište odvození formule $(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ z prázdné množiny předpokladů.

Řešení.

1.	$p \vee (q \wedge r)$	předpoklad
2.	p	předpoklad
3.	$p \vee q$	i$\vee_1$ 1
4.	$p \vee r$	i$\vee_1$ 1
5.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	i$\wedge$ 3 a 4
6.	$q \wedge r$	předpoklad
7.	q	e$\wedge_1$ 6
8.	$p \vee q$	i$\vee_2$ 7
9.	r	e$\wedge_2$ 6
10.	$p \vee r$	i$\vee_2$ 9
11.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	i$\wedge$ 8 a 10
12.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	e$\vee$ 1–11
13.	$(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	i$\Rightarrow$ 1–12

5. Napište odvození formule $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (b \Rightarrow (a \Rightarrow c))$ z prázdné množiny předpokladů.

Řešení.

1.	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$	předpoklad
2.	b	předpoklad
3.	a	předpoklad
4.	$b \Rightarrow c$	e$\Rightarrow$ 3 a 1
5.	c	e$\Rightarrow$ 2 a 4
6.	$a \Rightarrow c$	i$\Rightarrow$ 3–5
7.	$b \Rightarrow (a \Rightarrow c)$	i$\Rightarrow$ 2–6
8.	$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (b \Rightarrow (a \Rightarrow c))$	i$\Rightarrow$ 1–7

6. Napište odvození formule $a \Rightarrow b$ z množiny předpokladů $\{\neg a\}$.

Řešení.

1.	$\neg a$	axiom (globální předpoklad)
2.	a	předpoklad
3.	$\perp$	i$\perp$ 2 a 1
4.	b	e$\perp$ 3
5.	$a \Rightarrow b$	i$\Rightarrow$ 2–4

7. Napište odvození formule $\neg b \Rightarrow \neg a$ z množiny předpokladů $\{a \Rightarrow b\}$.

Řešení.

1.	$a \Rightarrow b$	axiom (globální předpoklad)
2.	$\neg b$	předpoklad
3.	a	předpoklad
4.	b	e$\Rightarrow$ 3 a 1
5.	$\perp$	i$\perp$ 4 a 2
6.	$\neg a$	i$\neg$ 3–5
7.	$\neg b \Rightarrow \neg a$	i$\Rightarrow$ 2–6

8. Napište odvození formule $\neg a$ z množiny předpokladů $\{a \Rightarrow \neg a\}$.

Řešení.

1.	$a \Rightarrow \neg a$	axiom (globální předpoklad)
2.	a	předpoklad
3.	$\neg a$	e$\Rightarrow$ 2 a 1
4.	$\perp$	i$\perp$ 2 a 3
5.	$\neg a$	i$\neg$ 2–4

9. Napište odvození formule $b \Rightarrow (a \wedge b)$ z množiny předpokladů $\{a\}$.

Řešení.

1.	a	axiom (globální předpoklad)
2.	b	předpoklad
3.	$a \wedge b$	i$\wedge$ 1 a 2
4.	$b \Rightarrow (a \wedge b)$	i$\Rightarrow$ 2–3

10. Napište odvození formule $\neg a$ z množiny předpokladů $\{\neg b, a \Rightarrow b\}$.

Řešení.

1.	$\neg b$	axiom (globální předpoklad)
2.	$a \Rightarrow b$	axiom (globální předpoklad)
3.	a	předpoklad
4.	b	e$\Rightarrow$ 3 a 2
5.	$\perp$	i$\perp$ 4 a 1
6.	$\neg a$	i$\neg$ 3–5

11. Napište odvození formule $\neg(a \wedge b)$ z množiny předpokladů $\{\neg a\}$.

Řešení.

1.	$\neg a$	axiom (globální předpoklad)
2.	$a \wedge b$	předpoklad
3.	a	e$\wedge_1$ 2
4.	$\perp$	i$\perp$ 3 a 1
5.	$\neg(a \wedge b)$	i$\neg$ 2–4

12. Napište odvození formule $\neg p$ z množiny předpokladů $\{p \Rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r\}$.

Řešení.

1.	$p \Rightarrow (q \vee r)$	axiom (globální předpoklad)
2.	$\neg q$	axiom (globální předpoklad)
3.	$\neg r$	axiom (globální předpoklad)
4.	p	předpoklad
5.	$q \vee r$	e$\Rightarrow$ 4 a 1
6.	q	předpoklad
7.	$\perp$	i$\perp$ 6 a 2
8.	r	předpoklad
9.	$\perp$	i$\perp$ 8 a 3
10.	$\perp$	e$\vee$ 5–9
11.	$\neg p$	i$\neg$ 4–10

13. Napište odvození formule p z množiny předpokladů $\{\neg(\neg p \lor q)\}$.

Řešení.

1.	$\neg(\neg p \lor q)$	axiom (globální předpoklad)
2.	$\neg p$	předpoklad
3.	$\neg p \lor q$	i$\lor_1$ 2
4.	$\bot$	i$\bot$ 3 a 1
5.	$\neg\neg p$	i$\neg$ 2–4
6.	p	e$\neg$ 5

14. Napište odvození formule $(n \land \neg t) \Rightarrow p$ z množiny předpokladů $\{(c \land n) \Rightarrow t, h \land \neg s, h \land (\neg(s \lor c) \Rightarrow p)\}$.

Řešení.

1.	$(c \land n) \Rightarrow t$	axiom (globální předpoklad)
2.	$h \land \neg s$	axiom (globální předpoklad)
3.	$h \land (\neg(s \lor c) \Rightarrow p)$	axiom (globální předpoklad)
4.	h	e$\land_1$ 2
5.	$\neg s$	e$\land_2$ 2
6.	$\neg(s \lor c) \Rightarrow p$	e$\land_2$ 3
7.	$n \land \neg t$	předpoklad
8.	$\neg p$	předpoklad
9.	$\neg(s \lor c)$	předpoklad
10.	p	e$\Rightarrow$ 9 a 6
11.	$\bot$	i$\bot$ 10 a 8
12.	$\neg\neg(s \lor c)$	i$\neg$ 9–11
13.	$s \lor c$	e$\neg$ 12
14.	s	předpoklad
15.	$\bot$	i$\bot$ 14 a 5
16.	c	předpoklad
17.	n	e$\land_1$ 7
18.	$c \land n$	i$\land$ 16 a 17
19.	t	e$\Rightarrow$ 18 a 1
20.	$\neg t$	e$\land_2$ 7
21.	$\bot$	i$\bot$ 19 a 20
22.	$\bot$	e$\lor$ 13–21
23.	$\neg\neg p$	i$\neg$ 8–22
24.	p	e$\neg$ 23
25.	$(n \land \neg t) \Rightarrow p$	i$\Rightarrow$ 7–24

15. Napište odvození formule $\neg p \lor \neg q$ z množiny předpokladů $\{\neg(p \land q)\}$.

Řešení.

1.	$\neg(p \land q)$	axiom (globální předpoklad)
2.	$\neg(\neg p \lor \neg q)$	předpoklad
3.	$\neg p$	předpoklad
4.	$\neg p \lor \neg q$	i$\lor_1$ 3
5.	$\bot$	i$\bot$ 4 a 2
6.	$\neg\neg p$	i$\neg$ 3–5
7.	p	e$\neg$ 6
8.	$\neg q$	předpoklad
9.	$\neg p \lor \neg q$	i$\lor_2$ 8
10.	$\bot$	i$\bot$ 9 a 2
11.	$\neg\neg q$	i$\neg$ 8–10
12.	q	e$\neg$ 11
13.	$p \land q$	i$\land$ 7 a 12
14.	$\bot$	i$\bot$ 13 a 1
15.	$\neg\neg(\neg p \lor \neg q)$	i$\neg$ 2–14
16.	$\neg p \lor \neg q$	e$\neg$ 15

16. Napište odvození formule $(p \land q) \lor (\neg p \land q)$ z množiny předpokladů $\{q\}$.

Řešení.

1.	q	axiom (globální předpoklad)
2.	$\neg(p \lor \neg p)$	předpoklad
3.	p	předpoklad
4.	$p \lor \neg p$	i$\lor_1$ 3
5.	$\bot$	i$\bot$ 4 a 2
6.	$\neg p$	i$\neg$ 3–5
7.	$p \lor \neg p$	i$\lor_2$ 6
8.	$\bot$	i$\bot$ 7 a 2
9.	$\neg\neg(p \lor \neg p)$	i$\neg$ 2–8
10.	$p \lor \neg p$	e$\neg$ 9
11.	$\neg((p \land q) \lor (\neg p \land q))$	předpoklad
12.	p	předpoklad
13.	$p \land q$	i$\land$ 12 a 1
14.	$(p \land q) \lor (\neg p \land q)$	i$\lor_1$ 13
15.	$\bot$	i$\bot$ 14 a 11
16.	$\neg p$	předpoklad
17.	$\neg p \land q$	i$\land$ 16 a 1
18.	$(p \land q) \lor (\neg p \land q)$	i$\lor_2$ 17
19.	$\bot$	i$\bot$ 18 a 11
20.	$\bot$	e$\lor$ 10–19
21.	$\neg\neg((p \land q) \lor (\neg p \land q))$	i$\neg$ 11–20
22.	$(p \land q) \lor (\neg p \land q)$	e$\neg$ 21

17. Napište odvození formule $\varphi \vee \neg\varphi$ z prázdné množiny předpokladů.

Řešení.

1.	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	předpoklad
2.	φ	předpoklad
3.	$\varphi \vee \neg\varphi$	i$\vee_1$ 2
4.	$\perp$	i$\perp$ 3 a 1
5.	$\neg\varphi$	i$\neg$ 2–4
6.	$\varphi \vee \neg\varphi$	i$\vee_2$ 5
7.	$\perp$	i$\perp$ 6 a 1
8.	$\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	i$\neg$ 1–7
9.	$\varphi \vee \neg\varphi$	e$\neg$ 8

Tento důkaz se implicitně vyskytuje v příkladu 16 na řádcích 2–10.

18. Napište odvození formule $\neg\neg\varphi$ z množiny předpokladů $\{\varphi\}$.

Řešení.

1.	φ	axiom (globální předpoklad)
2.	$\neg\varphi$	předpoklad
3.	$\perp$	i$\perp$ 1 a 2
4.	$\neg\neg\varphi$	i$\neg$ 2–3

19. Ukažte, že pravidlo důkazu sporem je korektní.

Řešení.

Nechť $\neg\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n = \perp$ je odvození $\perp$ (sporu) z předpokladu $\neg\varphi$. Po aplikaci pravidla i$\neg$ na posloupnost $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ odvodíme formuli $\neg\neg\varphi$. Následnou aplikací pravidla e$\neg$ na tuto formuli dostaneme φ.