Příklady na resoluční tabulku od prof. Marie Demlové

http://math.feld.cvut.cz/demlova/teaching/lgr/predn_lgr.html

1.8.15 Příklad. Pomocí rezoluční metody rozhodněte, zda množina klauzulí

$$S = \{x \vee y \vee \neg z, \neg x, x \vee y \vee z, x \vee \neg y, z \ \vee t \vee v, \neg t \vee w\}$$

je splnitelná. Je-li splnitelná, najděte pravdivostní ohodnocení, ve kterém je S pravdivá.

Řešení. Postup si znázorníme v následující tabulce 1.1. Tabulka má jeden sloupec pro každou klauzuli množiny S.

	$x \vee y \vee \neg z$	$\neg x$	$x \vee y \vee z$	$x \vee \neg y$	$z \vee t \vee v$	$\neg t \vee w$					
y:	1		1	0			$x \vee \neg z$	$x \vee z$			
x:		0					1	1	$\neg z$	z	
z:					1				0	1	**F**

Tabulka 1.1: Tabulka pro rezoluční metodu

Nejprve odstraníme logickou proměnnou y: První řádek tabulky je označen y. Nyní v tomto řádku napíšeme do sloupce 1, jestliže daná klauzule obsahuje literál y, a napíšeme 0, jestliže odpovídající klauzule obsahuje literál $\neg y$. Jestliže daná klauzule neobsahuje proměnnou y, do sloupce nepíšeme nic. K tabulce přidáme za každou resolventu podle proměnné y, která není tautologie, další sloupec odpovídající této resolventě. Jsou to sloupce odpovídající klauzulím:

$$x \vee \neg z \ = res_y(x \vee y \vee \neg z, x \vee \neg y) \quad \text{a} \quad x \vee z \ = res_y(x \vee y \vee z, x \vee \neg y).$$

Množina S_1 se skládá ze všech klauzulí, jejichž sloupce nejsou označeny, tj. neobsahují ani 1, ani 0. Máme

$$S_1 = \{\neg x, z \ \vee t \vee v, \neg t \vee w, x \vee \neg z, x \vee z\}.$$

V dalším kroku vybereme další logickou proměnnou, např. x, a postupuje obdobně jako v kroku 1. Dostaneme množinu klauzulí S_2 (která již neobsahuje ani logickou proměnnou y, ani x):

$$S_2 = \{z \vee t \vee v, \neg t \vee w, \neg z, z\}.$$

Uvědomte si, že platí: množina S je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina S_2.

Dále vybereme logickou proměnnou z. Protože devátý sloupec odpovídá klauzuli z a desátý klauzuli $\neg z$, je jejich resolventa prázdná klauzule **F**. Tím jsme ukázali, že množina S_2 je nesplnitelná a proto jsou nesplnitelné i množiny klauzulí S_1 a S. Tedy odpověď je: S je nesplnitelná.

1.8.16 Příklad. Pomocí rezoluční metody rozhodněte, zda je splnitelná množina klauzulí

$$S = \{a \vee \neg d, \neg b \vee \neg c, b \vee d, \neg b \vee \neg e, a \vee c \vee d, \neg a \vee \neg d\}$$

Jestliže je splnitelná, najděte pravdivostní ohodnocení, ve kterém je S pravdivá.

Řešení: Postupujeme obdobně jako v minulém příkladě. Dostaneme následující tabulku 1.2. (Uvědomte si, že tvar tabulky je určen pořadím výběru jednotlivých logických proměnných.)

	$a \vee \neg d$	$\neg b \vee \neg c$	$b \vee d$	$\neg b \vee \neg e$	$a \vee c \vee d$	$\neg a \vee \neg d$			
e:				0					
c:		0			1		$a \vee \neg b \vee d$		
b:			1				0	$a \vee d$	
d:	0					0		1	a
a:									1

Tabulka 1.2: Příklad tabulky pro splnitelnou množinu

Všimněte si, že v předposledním řádku jsme nepřidali sloupec pro jednu resolventu; je to proto, že $res_d(\neg a \vee \neg d, a \vee d)$ je tautologie $a \vee \neg a$.

Z tabulky je patrné, že množina S je splnitelná, protože nakonec jsme získali prázdnou množinu klauzulí — nezbyl žádný neoznačený sloupec — a prázdná množina je pravdivá ve všech ohodnoceních, tudíž je splnitelná.

Nyní z tabulky 1.2 odvodíme pravdivostní ohodnocení, ve kterém je množina S pravdivá. Postup je znázorněn v tabulce 1.3.

	$a \vee \neg d$	$\neg b \vee \neg c$	$b \vee d$	$\neg b \vee \neg e$	$a \vee c \vee d$	$\neg a \vee \neg d$			
e:				0					
c:		0			1		$a \vee \neg b \vee d$		
b:			1				0	$a \vee d$	
d:	0					0		1	a
a:									1
	$\uparrow_1$	$\uparrow_4$	$\uparrow_3$	$\uparrow_5$	$\uparrow_1$	$\uparrow_2$	$\uparrow_1$	$\uparrow_1$	$\uparrow_1$

Tabulka 1.3: Konstrukce pravdivostního ohodnocení

Poslední řádek tabulky byl ohodnocen proměnnou a. Protože v tomto řádku máme 1, prohlásíme literál a za pravdivý, tj. položíme $u(a) = 1$. Označíme si v tabulce **všechny** klauzule, které se touto volbou $u(a) = 1$ stanou pravdivé (označeny jsou šipkou s číslem 1).

Nyní přistoupíme k předposlednímu řádku tabulky. Sloupce, které nejsou označené šipkou 1, obsahují v tomto řádku už jen 0. Rozšíříme proto pravdivostní ohodnocení u tak, aby literál $\neg d$ by pravdivý, tj. položíme $u(d) = 0$. Označíme šipkou s indexem 2 ty klauzule, které se touto volbou stanou pravdivé (a nestaly se pravdivé již v předchozím kroku).

Obdobným způsobem postupujeme v tabulce nahoru až zajistíme, že všechny klauzule obsažené v tabulce budou pravdivé: dostaneme $u(b) = 1$, $u(c) = 0$ a $u(e) = 0$.

Je snadné se přesvědčit, že v takto definovaném pravdivostním ohodnocení je původní množina klauzulí S pravdivá.

1.8.17 Poznámka. V předchozím příkladě jsme definovali pravdivostní ohodnocení pro všechny logické proměnné, které se v množině S nacházely. To se nemusí stát vždy. V případě, že zajistíme pravdivost všech klauzulí nezávisle na některé logické proměnné, znamená to, že tuto proměnnou můžeme definovat libovolně.