Checklist: Jak na limity

Typ: Dosadím a vyjde to. **Trik:** Dosadit limitní bod.

Používá se při tom často následujících faktů: (používáme L pro limitu, která konverguje, tj. existuje a je konečná):

— $\infty + \infty = \infty$, $\infty \pm L = \infty$,

— $\infty \cdot L = \infty$ pro $L > 0$, $\infty \cdot L = -\infty$ pro $L < 0$, $\infty \cdot \infty = \infty$,

— $\infty^L = \infty$ pro $L > 0$, $L^\infty = \infty$ pro $L > 1$, $L^\infty = 0$ pro $L \in (-1, 1)$, L^∞ neexistuje pro $L < -1$,

— $\frac{L}{\infty} = 0$, $\frac{L}{0^+} = \infty$, $\frac{L}{0^-} = -\infty$,

— $0^L = 0$ pro $L > 0$, $1^L = 1$, $L^0 = 1$ pro $L > 0$

— $e^\infty = \infty$, $\ln(\infty) = \infty$, $\ln(0^+) = -\infty$.

Záporné exponenty jsou zrádné a nejlépe se řeší pomocí $A^{-b} = \frac{1}{A^b}$.

Příklad: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{-n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^n}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)\ln(2e^x-1)}{x^3+1}\right) = \frac{0}{1} = 0$.

Pozor: $\frac{1}{0}$ není hned vidět, jak ostatně plyne z $\frac{1}{0^\pm} = \pm\infty$. Pokud máme $\frac{1}{0}$, musíme se podívat na jednostranné limity. Pokud obě vyjdou shodně, je to ta limita. Pokud vyjdou různě, limita neexistuje.

Neurčité výrazy: Hodí se vědět, kdy dosazení zklame:

— $0 \cdot \infty$: např. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot n\right) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot n\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot n^2\right) = \infty$,

— $\frac{\infty}{\infty}$: např. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}\right) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n}\right) = \infty$,

— $\frac{0}{0}$: např. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{\sin(x)}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}\right) = 2$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin(x)}{\sin(x^2)}\right) = \infty$,

— $\infty - \infty$: např. $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - n) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\big((n+13) - n\big) = 13$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n - n^2) = -\infty$,

— ∞^0, 1^∞, 0^0: např. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{c}{n}\right)^n\right] = e^c$ pro libovolné c.

Triky pro tyto výrazy přijdou níže.

Typ: Geometrická posloupnost. **Trik:** Pamatuji $a^n \to 0$ pro $|a| < 1$, $\{a^n\}$ diverguje pro $|a| > 1$, konkrétně $a^n \to \infty$ pro $a > 1$.

Příklad: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{2^{2n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3\cdot 3^n}{(2^2)^n}\right) = 3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{4^n}\right) = 3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 0$.

Typ: Limity v nekonečnu s polynomy a (obecnými) exponenciálami. **Trik:** Vytknu nejvyšší mocninu.

A tak zjistím, že polynom se chová v nekonečnu jako jeho vedoucí (největší) mocnina, což se hodí např. u zlomku.

Příklad: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x(1+\frac{2}{x})}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\right) = \infty\frac{1-0}{1+0} = \infty\cdot 1 = \infty$.

Občas lze přímo pokrátit: $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^2+3x+2}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to -1}(x+2) = 1$.

Příklad: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(-3)^n+2^{2n+1}}{e^n-2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(-3)^n+2\cdot 4^n}{e^n-2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4^n\left(\left(\frac{-3}{4}\right)^n+2\right)}{e^n\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{4}{e}\right)^n\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^n+2}{1-\left(\frac{2}{e}\right)^n}\right) = \infty\frac{0+2}{1-0} = \infty.$$

Zde jsme použili znalosti geometrické posloupnosti a faktu, že $\left|\frac{2}{e}\right| < 1$, $\left|-\frac{3}{4}\right| < 1$ a $\frac{4}{e} > 1$.

Vytýkání se také často používá u odmocnin, jako v $\sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ Pokud je $x > 0$, lze dále upravovat $\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$.

Příklad (všimněte si, že $x \to \infty$ znamená $x > 0$):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^3+x+1}+x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x(1-\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x(1-\frac{1}{x})}{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1}\right) = \frac{1-0}{\sqrt[3]{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

Typ: Výraz schovaný v pěkné funkci. **Trik:** Pustit limitu dovnitř.

Příklad: $\lim\big(\sin\sqrt{\frac{e^x-\ln(x)}{1+x^2}}\big) = \sin\sqrt{\lim\big(\frac{e^x-\ln(x)}{1+x^2}\big)}$, tu limitu uvnitř udělám jednodušeji než limitu celé původní funkce.

Typ: Limita s výrazem, který bych rád zjednodušil (pravděpodobně je tam vícekrát). **Trik:** Substituce. Pozn: Je třeba zcela změnit limitu, tj. při substituci $y = g(x)$ musí všechna x z limity zmizet (včetně dole pod lim); toto nahrazení se dělá pomocí substituční rovnice $y = g(x)$.

Příklad:

$$\lim_{x\to 1^+}\Big(x\frac{(1+\frac{1}{x})\ln(1+\frac{1}{x})}{\cos(\pi+\frac{\pi}{x})}\Big) = \left|\begin{array}{c} y = 1+\frac{1}{x} \implies x = \frac{1}{y-1} \\ x\to 1^+ \implies y\to 2^- \end{array}\right| = \lim_{y\to 2^-}\big(\tfrac{1}{y-1}\,\tfrac{y\ln(y)}{\cos(\pi y)}\big) = \tfrac{1}{1}\,\tfrac{2\ln(2)}{1} = 2\ln(2).$$

Častý trik: $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)\big)$, nechci mínus nekonečno, použiji $y = -x$, tj. $x = -y$, dostanu $\lim_{y\to\infty}\big(f(-y)\big)$.

Typ: Limita, kterou si pamatuji. **Trik:** Prohledám paměť, občas upravím.

Za zapamatování stojí například: $\lim_{n\to\infty}\big[\big(1+\frac{c}{n}\big)^n\big] = e^c$, $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\sin(x)}{x}\big) = 1$, $\lim_{x\to 0^+}\big(x\ln(x)\big) = 0$, $\lim_{x\to\infty}\big(\frac{\ln(x)}{x}\big) = 0$, $\lim_{x\to\infty}\big(\frac{x}{e^x}\big) = 0$, popř. $\lim_{x\to 0}\big(\frac{e^x-1}{x}\big) = 1$, $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\ln(x+1)}{x}\big) = 1$, $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\cos(x)-1}{x}\big) = 0$.

Funguje to jen tak, jak je psáno, takže např. u $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\sin(2x)}{x}\big)$ musím použít substituci $y = 2x$, dostanu $\lim_{y\to 0}\big(2\frac{\sin(y)}{y}\big) = 2$.

Příklad: $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\tan(x^2)}{x}\big) = \lim_{x\to 0}\big(\frac{x}{\cos(x)}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\big)$, část $\lim_{x\to 0}\big(\frac{x}{\cos(x)}\big)$ dělám přímo, na část $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\sin(x^2)}{x^2}\big)$ použiji $y = x^2$ a výsledky vynásobím.

Typ: $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ a vadí mi to. **Trik:** Násobím a dělím výrazem $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, použiji $(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B}) = A-B$.

Podobný trik se použije pro $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$, násobím a dělím výrazem $\big(\sqrt[3]{A}\big)^2+\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\big(\sqrt[3]{B}\big)^2$.

Příklad:

$$\lim_{x\to 0}\big(\tfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\big) = \lim_{x\to 0}\Big(\tfrac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\tfrac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\Big) = \lim_{x\to 0}\big(\tfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\big) = 1.$$

Typ: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$. **Trik:** L'Hôpital.

Pamatuji si $\lim_{x\to A}\big(\frac{f}{g}\big) = \lim_{x\to A}\big(\frac{f'}{g'}\big)$, ale pouze pro typy $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ (obecněji $\frac{*}{\infty}$), a jen tehdy, jestli pravá strana existuje.

Příklad: $\lim_{x\to\infty}\big(\frac{x^2}{e^{3x}}\big) = \lim_{x\to\infty}\big(\frac{2x}{3e^{3x}}\big) = \lim_{x\to\infty}\big(\frac{2}{9e^{3x}}\big) = \frac{2}{\infty} = 0$.

Dá se také někdy pokrátit (a bývá to kratší), viz *Typ: polynomy*, u typu $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ bývá uvedený trik výrazně kratší než l'Hôpital.

Typ: $0\cdot\infty$. **Trik:** L'Hôpital, nejprve musíme udělat ze součinu podíl.

Příklad:

Možnost $0\cdot\infty = \dfrac{1}{\frac{1}{0}}\cdot\infty = \frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x\to 0^+}\big(x\ln(x)\big) = \lim_{x\to 0^+}\big(\frac{\ln(x)}{x^{-1}}\big) = \lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}\Big) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$.

Možnost $0\cdot\infty = 0\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$: $\lim_{x\to\infty}\big[x\sin\big(\frac{1}{x}\big)\big] = \lim_{x\to\infty}\Big(\dfrac{\sin\big(\frac{1}{x}\big)}{\frac{1}{x}}\Big)$; tohle je $\frac{0}{0}$, ale l'H vede na derivaci složené funkce, snažší je substituce $y = \frac{1}{x}$, dostanu $\lim_{y\to 0^+}\big(\frac{\sin(y)}{y}\big) = 1$ (buď zapamatováním nebo l'Hôpitalem).

Typ: $\infty-\infty$. **Trik:** Doufám, že je to *typ* $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ (viz příslušný trik) nebo že lze udělat nějak přirozeně společný jmenovatel. Obecně zabere $A-B = A(1-\frac{B}{A})$, kde $\frac{B}{A}$ je pak *typ* $\frac{\infty}{\infty}$ a l'Hôpital to jistí.

Příklad: $\lim_{x\to\infty}\big(\sqrt{x}-\ln(x)\big) = \lim_{x\to\infty}\Big(\sqrt{x}\big(1-\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\big)\Big) = \infty\big(1-0\big) = \infty$.

V nouzi největší použiji triku $A-B = \dfrac{1}{\frac{1}{A}}-\dfrac{1}{\frac{1}{B}} = \dfrac{\frac{1}{B}-\frac{1}{A}}{\frac{1}{AB}}$, což je *typ* $\frac{0}{0}$ a l'Hôpital to snad udolá.

Typ: Obecné mocniny. **Trik:** $A^B = e^{B\ln(A)}$. Použiji kdykoliv si nejsem jist s mocninou. Pak použiji trik z *Typu limita uvnitř pěkné funkce*, abych "vytáhl" e ven.

Příklad:

$\lim_{x\to 0^+}(x^x)$ je neurčitý typ 0^0. $\lim_{x\to 0^+}(x^x) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^{x\ln(x)}\right) = e^{\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln(x)\right)} = e^0 = 1$, pro $\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln(x)\right)$ použte *typ* $0\cdot\infty$: převod na podíl a l'Hôpitala.

Typ: Limita s oscilačním členem typu $(-1)^n$, $\sin(\infty)$, $\cos(\infty)$. **Trik:** Věta o sevření, někdy pomůže Věta: Omezená krát nulová jest nulová.

Příklad: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)$, sevřeme $\frac{n-1}{n} \le \frac{n+(-1)^n}{n} \le \frac{n+1}{n}$. Protože $\frac{n\pm 1}{n} \to 1$ (viz polynomy), nutně $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right) = 1$.

Příklad:

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x)\right)$. Protože $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ a $\sin(x)$ je omezený, dostaneme $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right) = 0$.

Poznámka k všemocnosti l'Hôpitala: Cha!

L'Hôpital neumí odstranit exponenciály:

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right) = \text{l'H} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right) = \text{l'H} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)$.

Zde je nejlepší vykrátit: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) = 1$.

L'Hôpital neumí odstranit odmocniny:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^3}}\right) = \text{l'H} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}}\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{2}{3x}\right)\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{2}{3}\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \text{l'H} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}}{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}\right) = \frac{2}{3}\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{3x}{2}\right)\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^3}}\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^3}}\right).$$

Zase je nejlepší vykrátit: $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^3}}\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^3}}\right)$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1-x^2}{1-x^3}\right)} = \sqrt{\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)} = \sqrt{\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1+x}{1+x+x^2}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Bonus: Občas se hodí vědět, jak se skládají neexistující limity. Použijeme N pro limitu, která neexistuje, např. $\lim_{n\to\infty}\left((-1)^n\right)$, $\lim_{n\to\infty}\left(\cos(n)\right)$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$ nebo $\lim_{x\to 0}\left(\sin(\frac{1}{x})\right)$.

Pravidla:

$L\cdot N = N$ pro $L \neq 0$, $L + N = N$, $N/L = N$, $N^\alpha = N$ pro $\alpha > 0$.

Neurčité výrazy s N již nejsou tak užitečné jako u nekonečen (příklady jsou většinou založeny na $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$ nebo $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\right)$, obojí jsou N):

— $0\cdot N$: např. $\lim_{x\to 0}\left(x^2\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to 0}\left(x\frac{1}{x}\right) = 1$, $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{x}\frac{1}{x}\right) = \infty$ (je to $\frac{1}{0^+}$), $\lim_{x\to 0}\left(x^2\frac{1}{x^3}\right)$ je N.

— $\frac{N}{N}$: např. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1/x}{1/x}\right) = 1$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1/x}{1/x^3}\right) = 0$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1/x^3}{1/x}\right) = \infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(n)}{\cos(n)}\right)$ je N.

— $N \pm N$: např. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} + \left[c - \frac{1}{x}\right]\right) = c$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3} + \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right]\right) = \infty$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right)$ je N.

— N^α: např. $\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^3\right]$ je N, ale $\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^2\right] = \infty$.