MA1: Cvičné příklady—opakování: algebra a množiny, grafy
Stručná řešení

1. $x + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + 13 = (x+2)^2 + 9$.

2. $(x+4)(x+6)$. **3.** $(x-2)^2$. **4.** Nejde rozložit.

5. $(\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x) \geq 0$.

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$\sqrt{3}+x:$	$-$	$+$	$+$
$\sqrt{3}-x:$	$+$	$+$	$-$
	$-$	$+$	$-$

Řešení: $x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$.

6.

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$x:$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1:$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+3:$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

Řešení: $x \in (-\infty,-3) \cup \langle 0,1 \rangle$.

7.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$x+1:$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3:$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)^2:$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2:$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

Řešení: $x \in (-\infty,-2) \cup (-1,1) \cup (1,3)$.

8.

$$-1 \leq \tfrac{x+3}{2} < 2 \qquad \Big/ \times 2$$
$$-2 \leq x+3 < 4 \qquad \Big/ -3$$
$$-5 \leq x < 1$$

Řešení: $x \in \langle -5, 1)$.

9. a) Řešení metodou vyzkouším všechna znaménka jmenovatele rozkladem reálné osy a roznásobím. Výsledky obou variant pak sjednotím.

$(-\infty,-1)$	$(-1,\infty)$
$-2x-2 > x-1 \geq x+1$	$-2x-2 < x-1 \leq x+1$
$-\frac{1}{3} > x \quad \wedge \quad -1 \geq 1$	$-\frac{1}{3} < x \quad \wedge \quad -1 \leq 1$
$\emptyset$	$\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$
$\wedge \quad x \in (-\infty,-1)$	$\wedge \quad x \in (-1,\infty)$
$\emptyset$	$\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$

$$x \in \left(-\tfrac{1}{3},\infty\right)$$

b) Řešení metodou každá nerovnice zvlášť, pak se výsledky protnou.

$$-2 < \tfrac{x-1}{x+1} \iff 0 < \tfrac{3x+1}{x+1}$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,-\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3},\infty)$
$3x+1:$	$-$	$-$	$+$
$x+1:$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Tato nerovnost má řešení $x \in (-\infty,-1) \cup \left(-\frac{1}{3},\infty\right)$.

$$\frac{x-1}{x+1} \le 1 \iff \frac{-2}{x+1} \le 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\infty)$
$-2:$	$-$	$-$
$x+1:$	$-$	$+$
	$+$	$-$

Tato nerovnost má řešení $x \in (-1,\infty)$.
Daná dvojitá nerovnost má řešení $x \in \left(-\frac{1}{3},\infty\right)$.

10. $0 < |x-(-3)| \le 2 \implies x \in \langle -5,-3) \cup (-3,-1\rangle$.

11. Zbavíme se absolutní hodnoty tím, že řešíme dvakrát na částech reálné osy daných znaménkem výrazu uvnitř absolutní hodnoty. Jednotlivé výsledky pak sjednotíme.

$(-\infty,1\rangle$	$\langle 1,\infty)$
$x-1\le 0$	$x-1\ge 0$
$2x-x+1\le 3$	$2x+x-1\le 3$
$x\le 2$	$x\le \frac{4}{3}$
$\wedge \quad x\in(-\infty,1\rangle$	$\wedge \quad x\in\langle 1,\infty)$
$(-\infty,1\rangle$	$\left\langle 1,\frac{4}{3}\right\rangle$

$$x \in \left(-\infty,\frac{4}{3}\right\rangle$$

Poznámka: V $x=1$ není problém, proto jej můžeme zahrnout těch dvou oblastí.

12. Rozdělíme reálnou osu na tři části, na kterých již budeme znát znaménka výrazů v absolutních hodnotách. Jednotlivé výsledky pak sjednotíme.

$(-\infty,-2\rangle$	$\langle -2,2\rangle$	$\langle 2,\infty)$
$x+2\le 0$	$x+2\ge 0$	$x+2\ge 0$
$x-2\le 0$	$x-2\le 0$	$x-2\ge 0$
$-x-2-x+2\le 5$	$x+2-x+2\le 5$	$x+2+x-2\le 5$
$x\ge -\frac{5}{2}$	$4\le 5$	$x\le \frac{5}{2}$
$\wedge \quad x\in(-\infty,-2\rangle$	$\wedge \quad x\in\langle -2,2\rangle$	$\wedge \quad x\in\langle 2,\infty)$
$\left\langle -\frac{5}{2},-2\right\rangle$	$\langle -2,2\rangle$	$\left\langle 2,\frac{5}{2}\right\rangle$

$$x \in \left\langle -\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right\rangle$$

Poznámka: V $x=\pm 2$ není problém, proto jej můžeme zahrnout těch dvou oblastí.

13. Rozdělíme reálnou osu na tři části, na kterých již budeme znát znaménka výrazů v absolutních hodnotách. Jednotlivé výsledky pak sjednotíme.

$(-\infty,-2\rangle$	$\langle -2,2\rangle$	$\langle 2,\infty)$
$x+2\le 0$	$x+2\ge 0$	$x+2\ge 0$
$x-2\le 0$	$x-2\le 0$	$x-2\ge 0$
$-x-2-x+2\le 3$	$x+2-x+2\le 3$	$x+2+x-2\le 3$
$x\ge -\frac{3}{2}$	$4\le 3$	$x\le \frac{3}{2}$
$\wedge \quad x\in(-\infty,-2\rangle$	$\wedge \quad x\in\langle -2,2\rangle$	$\wedge \quad x\in\langle 2,\infty)$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$$\emptyset$$

14. Rozdělíme reálnou osu na tři části, na kterých již budeme znát znaménka výrazů ve jmenovateli a v absolutní hodnotě. Jednotlivé výsledky pak sjednotíme.

$(-\infty,-1)$	$(-1,1\rangle$	$\langle 1,\infty)$
$\|x-1\|=-x+1$	$\|x-1\|=-x+1$	$\|x-1\|=x-1$
$x+1<0$	$x+1>0$	$x+1>0$
$-x-1>-x+1\ge\frac{x+1}{2}$	$-x-1<-x+1\le\frac{x+1}{2}$	$-x-1<x-1\le\frac{x+1}{2}$
$-1>1 \ \wedge\ \frac{1}{3}\ge x$	$-1<1 \ \wedge\ \frac{1}{3}\le x$	$0<x \ \wedge\ x\le 3$
$\emptyset$	$x\ge\frac{1}{3}$	$0<x\le 3$
$\wedge \quad x\in(-\infty,-1)$	$\wedge \quad x\in(-1,1\rangle$	$\wedge \quad x\in\langle 1,\infty)$
$\emptyset$	$\left\langle \frac{1}{3},1\right\rangle$	$\langle 1,3)$

$$x \in \left\langle \frac{1}{3},3\right)$$

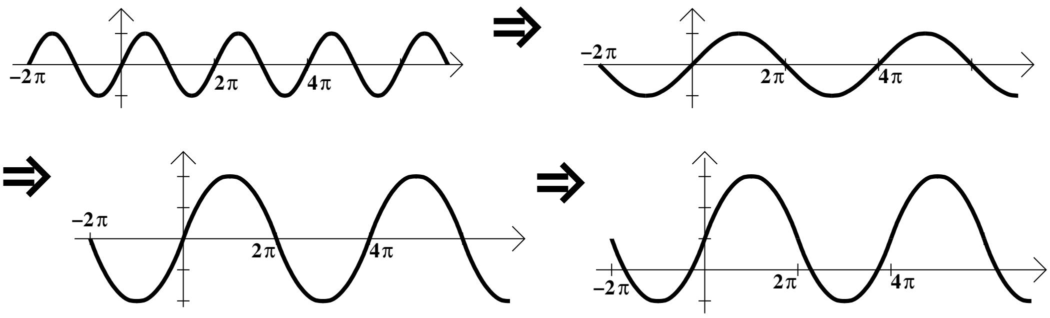
Poznámka: Ze tří uvažovaných intervalů jsme rovnou vyloučili nulový bod jmenovatele dané nerovnosti, tj. číslo -1, ale 1 jsme mohli ponechat.

	15.	**16.**	**17.**	**18.**
M^O	$\emptyset$	$(0,1)\setminus\{\frac{1}{n};\ n\in I\!N,\ n\geq 2\}$	$(-1,0)$	$\emptyset$
		$=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$		
otevřená	ne	ne	ne	ne
hrom. body	$\emptyset$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle -1,0\rangle$	$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right\rangle$
$\overline{M}$	M	$\langle 0,1\rangle$	M	$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right\rangle$
uzavřená	ano	ne	ano	ne
∂M	M	$\{0,1\}\cup\{\frac{1}{n};\ n\in I\!N,\ n\geq 2\}$	$\{-1,0\}\cup\{\frac{1}{n^2};\ n\in I\!N\}$	$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right\rangle$
omezená	jen shora	ano	ano	jen shora
$\sup(M)$	13	1	1	$\frac{1}{3}$
$\inf(M)$	$-\infty$	0	-1	$-\infty$
$\max(M)$	13	1	1	neex.
$\min(M)$	neex.	0	-1	neex.

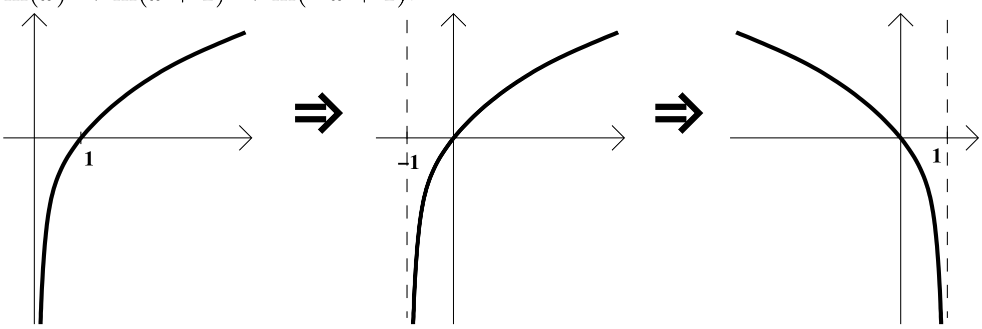
19. $-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x\leq 0+k\pi \implies x\in\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

20. $\sin(2x-\pi)>\frac{1}{2} \implies \frac{\pi}{6}+2k\pi<2x-\pi<\frac{5\pi}{6}+2k\pi \implies x\in\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{7\pi}{12}+k\pi,\frac{11\pi}{12}+k\pi\right)$.

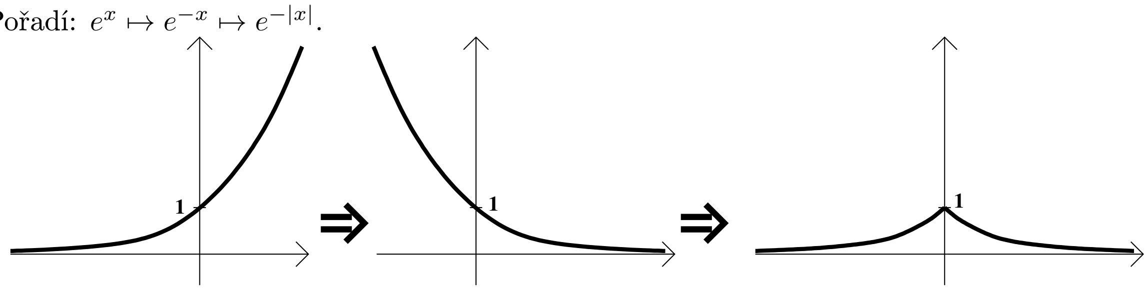
21. Pořadí: $\sin(x)\mapsto\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\mapsto 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\mapsto 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+1$.



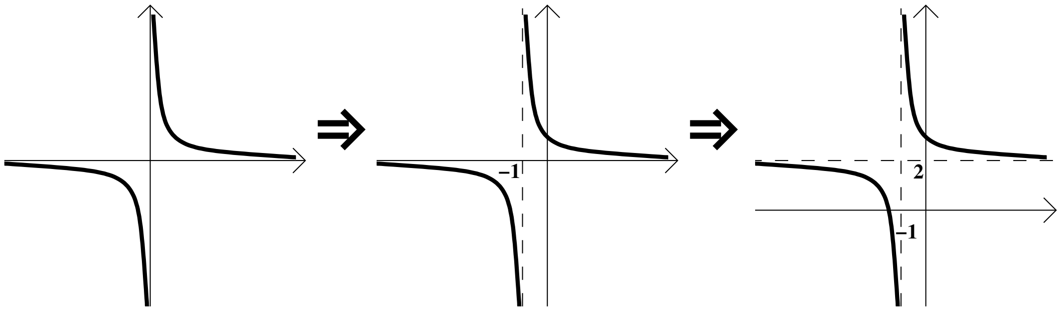
22. Pořadí: $\ln(x)\mapsto\ln(x+1)\mapsto\ln(-x+1)$.



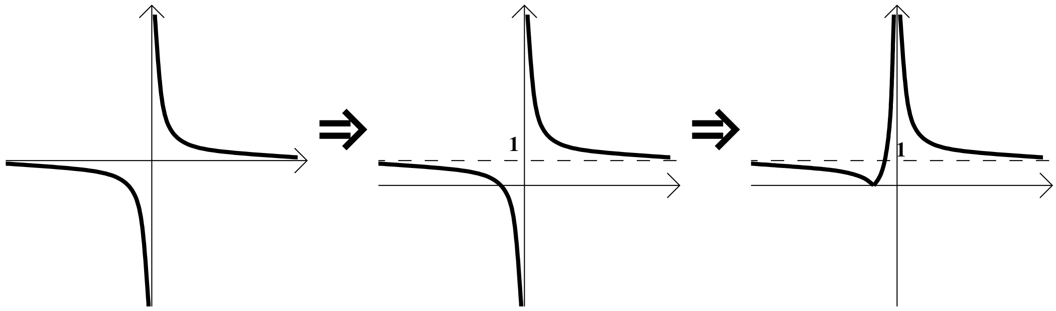
23. Pořadí: $e^x\mapsto e^{-x}\mapsto e^{-|x|}$.



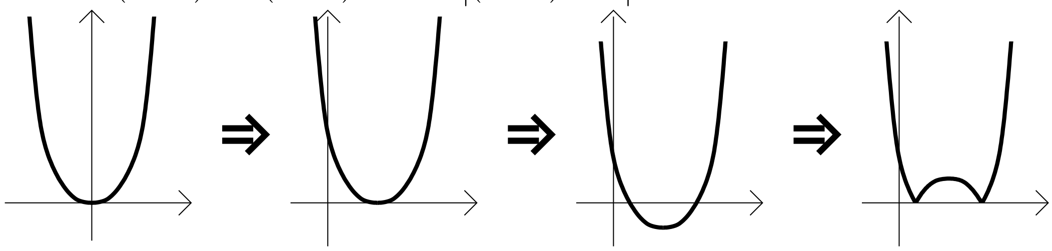
24. $\frac{2x+3}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$. Pořadí: $\frac{1}{x}\mapsto\frac{1}{x+1}\mapsto 2+\frac{1}{x+1}$.



25. Pořadí: $\frac{1}{x} \mapsto 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \mapsto \left|\frac{x+1}{x}\right|$.



26. Pořadí: $x^2 \mapsto (x-2)^2 \mapsto (x-2)^2 - 1 \mapsto \left|(x-2)^2 - 1\right|$.



Bonus: Odstraníme absolutní hodnotu rozkladem reálné osy na dvě oblasti dle znaménka uvnitř absolutní hodnoty a řešíme v každé příslušné oblasti zvlášť:

$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right\rangle$	$\left\langle \frac{5}{2}, \infty\right)$
$\left\lvert x - \frac{5}{2}\right\rvert = -x + \frac{5}{2}$	$\left\lvert x - \frac{5}{2}\right\rvert = x - \frac{5}{2}$
$x^2 + 4x - 32 = 0$	$x^2 - 4x - 12 = 0$
$x = -8 \quad \wedge \quad x = 4$	$x = -2 \quad \wedge \quad x = 6$
$\wedge \quad x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right\rangle$	$\wedge \quad x \in \left\langle \frac{5}{2}, \infty\right)$
$x = -8$	$x = 6$

$$x = -8, 6$$