

MA1: Cvičné příklady—funkce: $D(f)$ a vlastnosti, limity

V rámci většiny témat obtížnost příkladů stoupá od lehkých úvodních přes standardní po zajímavé.

Poznámka: Většina typů problémů (definiční obor, limity, asymptoty) se také dá procvičovat na příkladech na průběh funkce (viz Cvičné příklady na funkce: derivace).

Najděte definiční obor:

1. $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + \sqrt{4 - x} + \ln(2x);$

2. $f(x) = \frac{x}{\sin(x)};$

3. $f(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{x-1}{2}\right)};$

4. $f(x) = \arccos\left(\frac{x+1}{x}\right) + \sqrt{\ln(2x+7)};$

5. $f(x) = \sqrt{\arcsin\left(\frac{2+x}{1-x}\right)};$

6. $f(x) = \operatorname{argtgh}\left(\frac{2x}{x+3}\right) + \sqrt{\frac{x-1}{|x-2|}};$

7. $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x+1}\right)};$

8. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 12} - 2x);$

9. $f(x) = [\sin(x)]^x;$

10. $f(x) = \left[\cosh\left(\frac{1}{x}\right)\right]^x;$

11. $f(x) = \sqrt{\cos(x)} + x\sqrt{\frac{1+x}{2-x}};$

12. $f(x) = x^2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)}.$

Určete symetrii těchto funkcí:

13. $f(x) = \frac{x + x^3 + x^5}{x^2 - 1};$

14. $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right);$

15. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{\sinh(x)};$

16. $f(x) = \frac{\sin(3x)}{1 + \cos(2x)} + \operatorname{tg}^2(x);$

17. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1};$

18. $f(x) = \frac{\sin(x^{13} + 1)}{\sqrt[3]{x}}.$

Najděte následující limity:

19. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{e^x - 3x + \ln(x-1)}{x-1} \right);$

20. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\arcsin(x) + \sqrt{x+3});$

21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^x + \frac{1}{x-1} + 2 \operatorname{arctg}(x) \right);$

22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{x^2}}{x+1} \right);$

23. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1-x^2}{x-2} - \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}(3-x)\right] \right);$

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\ln(x+1)} \right);$

25. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{1 - \sqrt{x}} \right);$

26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \right);$

27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x}{\ln(2x)} \right);$

28. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 1} \right);$

29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - 1}{x^3 + 2x - 1} \right);$

30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - 1}{x^4 + 2x - 1} \right);$

31. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4x+1}\right) \right);$

32. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - 1}{x^2 + \sqrt{4x^3 - 1}} \right);$

33. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{x^2 - \sqrt{x}});$

34. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin\left(\pi \frac{\ln(x)}{1-x}\right) \right);$

35. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{2x} - 1}{7^x - 4^{x+1}} \right);$

36. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 1});$

37. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1} \right);$

38. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^4} \right);$

39. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + \sin(\operatorname{arctg}(x)) \right];$

40. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(e^{\frac{\sin(\pi x)}{x-1}} \right);$

41. $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)} \left(\frac{\ln(x)}{1 - \sin(x)} \right);$

42. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{x-2} \right);$

43. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right);$

44. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x^2)}{\frac{\cos(x)-1}{x} + 1} \right);$

45. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right);$

46. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - \operatorname{arctg}(x)}{x^2} \right);$

47. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x+1)^{1/\ln(x)} \right);$

48. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^3 + 4x^2} - \sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt{x} + 1} \right);$

49. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt[x]{1-x} \right);$

50. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}^3(2x)}{\ln^3(x+1)} \right);$

51. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sin(x)^{\sin(x)} \right);$

52. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right);$

53. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\arcsin(2\sqrt{x})}{\sqrt{x-x^2}} \right);$

54. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{1}{x} \right)^{\sin(x)} \right).$

Najděte následující limity závislé na parametru:

55. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^a}{x-1} \right);$

56. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\operatorname{arctg}(a/x)}{\sin(x)} \right);$

57. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{ax}}{1-ax} \right);$

58. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\ln(x+a)}{x-1} \right)$ pro $a \geq -1$.

59. Určete, pro které hodnoty parametru a se limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^a} \right)$ může počítat pomocí l'Hôpitalova pravidla, a vypočítejte ji tak.

Najděte hodnoty parametru, pro které následující limita konverguje, a pak ji pro tuto hodnotu vypočítejte.

60. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(a\pi x)}{x-1} \right);$

61. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{e^{cx}} \right);$

62. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left((ax-2) \ln(x-1) \right);$

63. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\ln(x+b)}{(x-1)^2} \right).$

Pro následující funkce najděte jejich definiční obor a limity v krajních bodech jeho intervalů:

64. $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}};$

65. $f(x) = \frac{\ln(2x-6)}{9-x^2};$

66. $f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2}{2x-4} \right);$

67. $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + \sin(x)}}{x^3};$

68. $f(x) = \ln \left(\frac{x}{x-1} \right);$

69. $f(x) = x(\pi - 2 \operatorname{arctg}(x));$

70. $f(x) = \arccos \left(\frac{1-x}{1-2x} \right);$

71. $f(x) = \sqrt[x]{\operatorname{arctg}(x)};$

72. $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x) + 1};$

73. $f(x) = x + \sqrt{\arccos(x)};$

74. $f(x) = \frac{2^x - 1}{\sqrt{x^2 - x}};$

75. $f(x) = \frac{[\cosh(\frac{1}{x})]^x}{\operatorname{arctg}(x)}.$

76. Pro funkci $f(x) = \frac{\ln(x)}{x - a}$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr, najděte definiční obor a limity v krajních bodech jeho intervalů.

Pro následující funkce najděte jejich případné asymptoty:

77. $f(x) = e^{1 - \frac{1}{x}};$

78. $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1};$

79. $f(x) = x + |x| - 1 + \frac{1}{x - 1};$

80. $f(x) = \ln(x e^x);$

81. $f(x) = \frac{x e^x}{e^x - e^{-x}};$

82. $f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x});$

83. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)};$

84. $f(x) = \frac{\ln(x + 1)}{x};$

85. $f(x) = x \sqrt{\sinh(x)};$

86. $f(x) = \frac{x^2 \sin(\pi x)}{x - 1}.$

Pro následující funkce určete jejich spojitost a klasifikujte nespojitosti:

87. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x}, & x < 0; \\ 1 - x, & x \in \langle 0, 1 \rangle; \\ e^{1/(1-x)}, & x > 1; \end{cases}$

88. $f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}), & x < 0; \\ 1, & x = 0; \\ x - \pi, & x \in (0, 1); \\ \ln(x - 1), & x > 1. \end{cases}$

Najděte hodnoty parametrů tak, aby byly následující funkce spojité:

89. $f(x) = \begin{cases} y = x + a, & x \leq 0; \\ \frac{\ln(\sin(x) + x + 1)}{\ln(x + 1)}, & x > 0; \end{cases}$

90. $f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x+2}, & x < 0; \\ 4, & x = 0; \\ \frac{e^{bx}-1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

Bonus.

91. Dokažte podle definice, že je $f(x) = \ln(1 - e^{2x})$ je prostá. Najděte inverzní funkci k f a dokažte podle definice, že je to opravdu inverzní funkce. Najděte obor hodnot této inverzní funkce f_{-1} a rozhodněte, zda je monotonní (dokažte podle definice).

Dokažte podle definice, že následující limity platí

92. $\lim_{x \rightarrow (-1)} (3x + 5) = 2;$ 93. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 5}{x + 1} \right) = 3;$ 94. $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 1) = \infty.$

95. Dokažte podle definice, že $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 4$ neplatí.

Rozhodněte, zda následující tvrzení platí, a svou odpověď dokažte.

96. Podíl dvou lichých funkcí je sudá funkce.

97. Součet liché a sudé funkce je vždy funkce bez jakékoliv symetrie.

98. Součet dvou funkcí nerostoucích na intervalu I je funkce nerostoucí na I .

99. Součin dvou funkcí rostoucích na intervalu I je funkce rostoucí na I .