

**MA1: Cvičné příklady—funkce:  $D(f)$  a vlastnosti, limity**  
**Stručná řešení**

Na zkoušce je samozřejmě nutné své kroky nějak odůvodnit. Rozsáhlejší pomocné výpočty se tradičně dělají stranou, ale bývá také moudré nějak naznačit i jednoduché úvahy, zejména u výpočtu limit. Standardní metoda není, ale mnoho lidí používá metodu stručných poznámek nad/pod rovnítkem. Například u tohoto výpočtu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)}{x^3} \right) \stackrel{\frac{0}{1^H}}{\sim} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\cos(x)}{3x^2} \right) \stackrel{\frac{1}{0^+}}{\sim} \infty$$

bude zkoušející hned vidět, co a proč jste dělali. Protože zde chceme často vysvětlit více, zvolili jsme poněkud netradiční, ale flexibilnější způsob. Části v «závorkách» nejsou součástí “oficiálního” řešení, ale dáváme tam vysvětlující poznámky či pomocné výpočty.

1. Podmínky:  $e^x - 1 \neq 0 \implies x \neq 0$ ;  $4 - x \geq 0 \implies x \leq 4$ ;  $2x > 0 \implies x > 0$ . Proto  $D(f) = (0, 4)$ .

2.  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (k\pi, \pi + k\pi)$  neboť  $\sin(x) \neq 0$ .

3.  $D(f) = (1, 3) \cup (3, \infty)$  neboť  $\frac{x-1}{2} > 0 \implies x > 1$ ;  $\ln\left(\frac{x-1}{2}\right) \neq 0 \implies \frac{x-1}{2} \neq 1 \implies x \neq 3$ .

4.  $D(f) = \langle -3, -\frac{1}{2} \rangle$  neboť  $-1 \leq \frac{x+1}{x} \leq 1 \implies 0 \leq \frac{2x+1}{x} \wedge \frac{1}{x} \leq 0 \implies x \leq -\frac{1}{2}$ ;  
 $\ln(2x+7) \geq 0 \implies 2x+7 \geq 1 \implies x \geq -3$ ;  $2x+7 > 0$  je slabší než  $2x+7 \geq 1$ .

5.  $D(f) = \langle -2, -\frac{1}{2} \rangle$  neboť  $\arcsin(\ ) \geq 0 \implies \frac{2+x}{1-x} \geq 0 \implies \langle -2, 1 \rangle$ ;  
 $-1 \leq \frac{2+x}{1-x} \leq 1$ ,  $-1 \leq$  už máme stačí  $\frac{2+x}{1-x} \leq 1 \implies \frac{2x+1}{1-x} \leq 0 \implies (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$ .

Poznámka: Kdyby tam byl arccos místo arcsinu, tak první podmínka odpadá, protože vždy  $\arccos(y) \geq 0$ .

6.  $D(f) = \langle 1, 2 \rangle \cup (2, 3)$  neboť  $-1 < \frac{2x}{x+3} < 1 \implies 0 < \frac{3x+3}{x+3} \wedge \frac{x-3}{x+3} < 0 \implies (-1, 3)$ ;  
 $x \neq 2$ ;  $\frac{x-1}{|x-2|} \geq 0, |x-2| \geq 0$  vždy  $\implies x-1 \geq 0 \implies x \geq 1$ .

7.  $D(f) = \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$  neboť  $x \neq -1$ ,  
 $\ln(\ ) \geq 0 \implies \frac{x^2+2x-3}{x+1} \geq 1 \implies \frac{x^2+2x-3}{x+1} \geq 0 \implies = \frac{(x+3)(x-1)}{x+1} \geq 0 \implies \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$ ;  
 $\frac{x^2+2x-3}{x+1} > 0$  je slabší než  $\frac{x^2+2x-3}{x+1} \geq 1$ .

8.  $D(f) = (-\infty, 2)$  neboť  $x^2 + 12 \geq 0$  vždy;  $\sqrt{x^2 + 12} - 2x > 0$  nerovnost hnus, ale spojitá funkce, zkusíme nulové body:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 12} - 2x &= 0 \\ \implies \sqrt{x^2 + 12} &= 2x \\ \implies x^2 + 12 &= 4x^2 \implies x = \pm 2 \end{aligned} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & (-\infty, -2) & (-2, 2) & (2, \infty) \\ \hline \sqrt{x^2 + 12} - 2x & + & + & - \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} -2 \text{ O.K.} \\ 2 \implies 0, \text{ proto } 2 \text{ ven!} \end{array}$$

9.  $D(f) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$  neboť  $f(x) = e^{x \ln(\sin(x))}$ ,  $\sin(x) > 0$ .

10.  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  neboť  $f(x) = e^{x \ln(\cosh(1/x))}$ ,  $x \neq 0$ ;  $\cosh(\ ) > 0$  vždy.

11.  $D(f) = (-1, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$  neboť  $\cos(x) \geq 0 \implies \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ ;

$$x \sqrt{\frac{1+x}{2-x}} = \left(\frac{1+x}{2-x}\right)^x = e^{\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right)}: \quad x \neq 0; \quad x \neq 2; \quad \frac{1+x}{2-x} > 0 \implies (-1, 2).$$

12.  $D(f) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (-2 + 4k, 4k)$  neboť  $f(x) = (\cos(\frac{\pi}{2}(x+1)))^{1/x^2} = e^{\frac{\ln(\cos(\pi/2(x+1)))}{x^2}}$ ,  $x \neq 0$ ;

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right) > 0 \implies -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{\pi}{2}(x+1) < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \implies -2 + 4k < x < 4k.$$

13. Lichá;  $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$  symetrická množina,

$$f(-x) = \frac{-x + (-x)^3 + (-x)^5}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x - x^3 - x^5}{x^2 - 1} = -\frac{x + x^3 + x^5}{x^2 - 1} = -f(x). \quad \text{Použito: } x, x^3, x^5 \text{ lichá, } x^2 \text{ sudá.}$$

14. Není symetrická;  $D(f) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$  není symetrická množina (třeba  $\frac{\pi}{3} \notin D(f)$  ale  $-\frac{\pi}{3} \in D(f)$ ).

15. Sudá;  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  symetrická množina,  
 $f(-x) = \frac{\operatorname{arctg}((-x)^3)}{\sinh(-x)} = \frac{\operatorname{arctg}(-x^3)}{-\sinh(x)} = \frac{-\operatorname{arctg}(x^3)}{-\sinh(x)} = \frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{\sinh(x)} = f(x)$ . Použito:  $x^3$ ,  $\sinh$ ,  $\operatorname{arctg}$  lichá.

16. Není symetrická;  $D(f) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$  symetrická množina,

$$f(-x) = \frac{\sin(-3x)}{1 + \cos(-2x)} + [\operatorname{tg}(-x)]^2 = \frac{-\sin(3x)}{1 + \cos(2x)} + [-\operatorname{tg}(x)]^2 = -\frac{\sin(3x)}{1 + \cos(2x)} + \operatorname{tg}^2(x).$$

Použito:  $\sin$ ,  $\operatorname{tg}$  lichá,  $\cos$ ,  $x^2$  sudá.

Aby byla sudá, muselo by  $\forall x \in D(f)$ :

$$-\frac{\sin(3x)}{1 + \cos(2x)} + \operatorname{tg}^2(x) = \frac{\sin(3x)}{1 + \cos(2x)} + \operatorname{tg}^2(x) \iff -\frac{\sin(3x)}{1 + \cos(2x)} = \frac{\sin(3x)}{1 + \cos(2x)} \iff$$

$$\iff -\sin(3x) = \sin(3x) \iff \sin(3x) = 0, \text{ to není pravda } \forall x \in D(f).$$

Aby byla lichá, muselo by  $\forall x \in D(f)$ :

$$-\frac{\sin(3x)}{1 + \cos(2x)} + \operatorname{tg}^2(x) = -\frac{\sin(3x)}{1 + \cos(2x)} - \operatorname{tg}^2(x) \iff \operatorname{tg}^2(x) = -\operatorname{tg}^2(x) \iff \operatorname{tg}^2(x) = 0,$$

není pravda  $\forall x \in D(f)$ .

17. Lichá;  $D(f) = \mathbb{R}$  symetrická množina,

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{e^x \frac{1}{e^x} - 1}{e^x \frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x).$$

18. Není symetrická;  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  symetrická množina,

$$f(-x) = \frac{\sin((-x)^{13} + 1)}{\sqrt[3]{-x}} = \frac{\sin(-x^{13} + 1)}{-\sqrt[3]{x}}. \quad \text{Použito: } x^{13}, \sqrt[3]{x}, \sin \text{ lichá.}$$

Aby byla sudá, muselo by  $\forall x \in D(f)$ :  $\frac{\sin(-x^{13} + 1)}{-\sqrt[3]{x}} = \frac{\sin(x^{13} + 1)}{\sqrt[3]{x}} \iff \sin(-x^{13} + 1) = -\sin(x^{13} + 1)$

$$\iff -\sin(-x^{13} + 1) = \sin(x^{13} + 1) \iff \sin(x^{13} - 1) = \sin(x^{13} + 1), \text{ to není pravda. Jak to víme?}$$

Kdyby to byla pravda, byl by  $\sin$  2-periodická funkce, ale on není. Nebo jinak: Aby to byla pravda, muselo by to platit  $\forall x \in D(f)$ , zkusíme  $x = \sqrt[13]{\pi - 1}$ , dosadíme,  $\sin(\pi - 2) = \sin(0)$  a neplatí to.

Aby byla lichá, muselo by  $\forall x \in D(f)$ :

$$\frac{\sin(-x^{13} + 1)}{-\sqrt[3]{x}} = -\frac{\sin(x^{13} + 1)}{\sqrt[3]{x}} \iff \sin(-x^{13} + 1) = \sin(x^{13} + 1), \text{ to není pravda jako u sudosti, zkusíme}$$

$x = \sqrt[13]{\pi - 1}$ , dosadíme,  $\sin(-\pi + 2) = \sin(0)$  neplatí.

19.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{e^x - 3x + \ln(x-1)}{x-1} \right) = \frac{e^2 - 3 \cdot 2 + \ln(2-1)}{2-1} = \frac{e^2 - 6 - \ln(1)}{1} = e^2 - 6$ .

20.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\arcsin(x) + \sqrt{x+3}) = \arcsin(1^-) + \sqrt{4} = \frac{\pi}{2} + 2$ .

21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( e^x + \frac{1}{x-1} + 2 \operatorname{arctg}(x) \right) = \left\langle e^\infty + \frac{1}{\infty-1} + 2 \operatorname{arctg}(\infty) = \infty + \frac{1}{\infty} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \infty + 0 + \pi \right\rangle = \infty$ .

22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{x^2}}{x+1} \right) \stackrel{\infty}{\text{I'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x \cdot e^{x^2}}{1} \right) \stackrel{\infty \cdot \infty}{=} \infty$ .

23.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{1-x^2}{x-2} - \operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{2} (3-x) \right] \right) = \left\langle x \rightarrow 2^+ \implies x > 2 \implies (x-2) > 0 \implies (x-2) \rightarrow 0^+ \right\rangle$   
 $= \left\langle x \rightarrow 2^+ \implies x > 2 \implies (3-x) < 1 \implies (3-x) \rightarrow 1^- \implies \frac{\pi}{2} (3-x) \rightarrow \left( \frac{\pi}{2} \right)^- \right\rangle$   
 $= \left\langle (-3) \frac{1}{0^+} - \operatorname{tg} \left[ \left( \frac{\pi}{2} \right)^- \right] = (-3) \cdot \infty - \infty = -\infty - \infty \right\rangle = -\infty$ .

24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\ln(x+1)} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{I'H}} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\frac{1}{x+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$ .

25.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\operatorname{arctg}(x)}{1-\sqrt{x}} \right) \stackrel{\frac{\pi/4}{0}}{=} \left\langle x \rightarrow 1^+ \implies x > 1 \implies \sqrt{x} > 1 \implies 1 - \sqrt{x} < 0 \implies 1 - \sqrt{x} \rightarrow 0^- \right\rangle$   
 $= \left\langle \frac{\pi/4}{0^-}, \pi/4 > 0 \right\rangle = -\infty$ .

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \ln \left( \frac{e^{-x}}{x} \right) \right) = \left\langle \left\langle \ln \left( \frac{e^{-\infty}}{\infty} \right) = \ln \left( \frac{0^+}{\infty} \right) \right\rangle \right\rangle \frac{\ln(0^+)}{\infty} = -\infty.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x}{\ln(2x)} \right) \stackrel{\infty}{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H}}{\lim_{x \rightarrow \infty}} \left( \frac{e^x}{\frac{1}{2x} \cdot 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x e^x) = \left\langle \infty \cdot e^\infty = \infty \cdot \infty \right\rangle = \infty.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\arcsin(x-1)}{x^2-1} \right) = \left\langle \left\langle \frac{\arcsin(0)}{0} = \frac{0}{0} \implies \text{l'H} \right\rangle \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}}{2x} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3-1}{x^3+2x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{y^3(2-\frac{1}{x^3})}{y^3(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3})} \right) = \left\langle \left\langle \frac{2-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty}} = \frac{2-0}{1+0-0} \right\rangle \right\rangle = 2.$$

Dominantní mocnina nahoře i dole je stejná, takže místo vytýkání šlo rovnou zkrátit  $x^3$  ve zlomku. Lze také použít l'Hospitala.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3-1}{x^3+2x-1} \right) \stackrel{\infty}{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H}}{\lim_{x \rightarrow \infty}} \left( \frac{6x^2}{3x^2+2} \right) \stackrel{\infty}{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{l'H}}{\lim_{x \rightarrow \infty}} \left( \frac{12x}{6x} \right) = 2.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3-1}{x^4+2x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{y^3(2-\frac{1}{x^3})}{x^4(1+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4})} \right) = \left\langle \left\langle \frac{1}{\infty} \frac{2-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty}} = 0 \cdot \frac{2-0}{1+0-0} \right\rangle \right\rangle = 0.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \ln \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \text{tg} \left( \frac{\pi x}{4x+1} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \ln \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \text{tg} \left( \frac{\pi}{4+\frac{1}{x}} \right) \right) = \left\langle \left\langle \ln(1-0) + \text{tg} \left( \frac{\pi}{4+0} \right) \right\rangle \right\rangle = 0 + \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} \right) = 1.$$

$$32. x^2 + \sqrt{4x^3-1} \sim x^2 + \sqrt{4x^3} = x^2 + 2x^{3/2}, \text{ proto dominanta ve jmenovateli je } x^2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3-1}{x^2 + \sqrt{4x^3-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3-1}{x^2 + x^{3/2} \sqrt{4-\frac{1}{x^3}}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3(2-\frac{1}{x^3})}{x^2 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{4-\frac{1}{x^3}} \right)} \right) = \left\langle \left\langle \frac{\infty(2-\frac{1}{\infty})}{1+\frac{1}{\infty}\sqrt{4-\frac{1}{\infty}}} = \infty \frac{2-0}{1+0\cdot\sqrt{4}} \right\rangle \right\rangle = \infty.$$

$$33. \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{x^2-\sqrt{x}}) \stackrel{\infty-\infty}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2(1-\frac{1}{x^{3/2}}))} = \left\langle \left\langle \infty(1-\frac{1}{\infty}) = \infty(1-0) \right\rangle \right\rangle = e^\infty = \infty.$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \sin \left( \pi \frac{\ln(x)}{1-x} \right) \right) = \left\langle \left\langle \sin \left( \frac{0}{0} \right) \right\rangle \right\rangle.$$

Toto volá po l'Hospitalovi, ale ten lze aplikovat jen na zlomky. Limitu zlomku dostaneme, když vytáhneme sinus coby vnější funkci z limity neboli když se podíváme jen na zlomek v jeho argumentu.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\ln(x)}{1-x} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\frac{\text{l'H}}{\lim_{x \rightarrow 1}}} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\frac{1}{x}}{-1} \right) = -1, \text{ proto } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \sin \left( \pi \frac{\ln(x)}{1-x} \right) \right) = \sin(\pi \cdot (-1)) = \sin(-\pi) = 0.$$

$$35. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3^{2x}-1}{7x-4x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{9^x-1}{7x-4 \cdot 4^x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{9^x}{7x} \cdot \frac{1-\frac{1}{9^x}}{1-4\frac{4^x}{7^x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{9}{7} \right)^x \frac{1-\frac{1}{9^x}}{1-4\left(\frac{4}{7}\right)^x} \right) = \left\langle \left\langle \frac{9}{7} > 1 \implies \left( \frac{9}{7} \right)^\infty = \infty, \left| \frac{4}{7} \right| < 1 \implies \left( \frac{4}{7} \right)^\infty = 0 \right\rangle \right\rangle \stackrel{\infty}{=} \infty.$$

$$36. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x} - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(\sqrt{x^2+4x} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+4x - (x^2+1)}{\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-1}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}} + x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right) = \left\langle \left\langle \frac{4-\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{4}{\infty}} + \sqrt{1+\frac{1}{\infty}}} = \frac{4-0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{4}{1+1} \right\rangle \right\rangle = 2.$$

Protože máme stejné dominantní mocniny, je možné je i zkrátit, vyjde to nastejno:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{1}{x}(4x-1)}{\frac{1}{x}(\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+1})} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+4x}}{\sqrt{x^2}} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4 - \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+4x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \right) = \dots$$

$$\begin{aligned} 37. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1} \right) &= \left\langle \frac{0}{0} \Rightarrow \text{trik na } \sqrt{\quad} - \sqrt{\quad} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{(\sqrt{2x-1} - 1)(\sqrt{2x-1} + 1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1} + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x-1-1^2}{(x-1)(\sqrt{2x-1} + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1} + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{\sqrt{2x-1} + 1} \right) \stackrel{\frac{2}{1+1}}{=} 1. \end{aligned}$$

Fungoval by i l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{[\sqrt{2x-1} - 1]'}{[x-1]'} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{[2x-1]'}{2\sqrt{2x-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \right) = 1.$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{x^2} - 1}{x^4} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x e^{x^2}}{4x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{x^2}}{2x^2} \right) = \left\langle \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0^+} \right\rangle = \infty.$$

$$39. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \ln \left( \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right) + \sin(\arctg(x)) \right] = \left\langle \ln \left( \frac{1+0}{1-0} \right) + \sin(\arctg(\infty)) \right\rangle = \ln(1) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1 = 1.$$

$$40. \lim_{x \rightarrow 1} \left( e^{\frac{\sin(\pi x)}{x-1}} \right) = \left\langle e^{\frac{0}{0}} \right\rangle.$$

Toto volá po l'Hospitalovi, ale ten lze aplikovat jen na zlomky. Limitu zlomku dostaneme, když vytáhneme exponenciálu coby vnější funkci z limity neboli když se podíváme jen na její argument.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sin(\pi x)}{x-1} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\pi \cos(\pi x)}{1} \right) = -\pi, \text{ proto } \lim_{x \rightarrow 1} \left( e^{\frac{\sin(\pi x)}{x-1}} \right) = e^{-\pi}.$$

$$\begin{aligned} 41. \lim_{x \rightarrow (\pi/2)} \left( \frac{\ln(x)}{1 - \sin(x)} \right) &= \left\langle \frac{\ln(\pi/2)}{0} \right\rangle \\ &= \left\langle \sin(x) \leq 1 \Rightarrow 1 - \sin(x) \geq 0 \Rightarrow 1 - \sin(x) \rightarrow 0^+; \frac{\pi}{2} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \right\rangle \stackrel{\frac{+}{0^+}}{=} \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 42. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{\sqrt{x}}}{x-2} \right) &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{[e^{\sqrt{x}}]'}{[x-2]'} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{\sqrt{x}}[\sqrt{x}]'}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \right) \\ &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{[e^{\sqrt{x}}]'}{[2\sqrt{x}]'} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{2}{2\sqrt{x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} \right) = \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 43. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x \ln \left( \frac{1}{x} + 1 \right) \right) &= \left\langle 0 \cdot \ln(\infty + 1) = 0 \cdot \ln(\infty) = 0 \cdot \infty \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln \left( \frac{1}{x} + 1 \right)}{\frac{1}{x}} \right) \\ &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\frac{1}{1/x+1} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \right) \stackrel{\frac{1}{\infty}}{=} 0. \end{aligned}$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(x^2)}{\frac{\cos(x)-1}{x} + 1} \right) = \left\langle \frac{\ln(0^+)}{\frac{1-1}{0} + 1} = \frac{-\infty}{0 + 1} \right\rangle.$$

Nejjednodušší je zkusit ten malý neurčitý zlomek spočítat zvlášť.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(x) - 1}{x} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)}{1} \right) = 0, \text{ proto } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(x^2)}{\frac{\cos(x)-1}{x} + 1} \right) = \left\langle \frac{-\infty}{0+1} \right\rangle = -\infty.$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = \left\langle \frac{1}{0} - \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \right\rangle. \quad \text{Zkusíme jednostranné limity:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = \left\langle \frac{1}{0^+} - \frac{1}{(0^+)^3} = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{0^+} = \infty - \infty \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2 - 1}{x^3} \right) = \left\langle \frac{-1}{(0^+)^3} = -\frac{1}{0^+} \right\rangle = -\infty.$$

$$\text{Podobně } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{x^2 - 1}{x^3} \right) = \left\langle \frac{-1}{(0^-)^3} = -\frac{1}{0^-} \right\rangle = \infty.$$

Protože limity zleva a zprava nesouhlasí,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right)$  neexistuje.

$$46. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - \arctg(x)}{x^2} \right) = \left\langle \frac{\infty - \pi/2}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{l'H} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{[x - \arctg(x)]'}{[x^2]'} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - \frac{1}{x^2+1}}{2x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \right) = \left\langle \frac{1}{\infty+0} = \frac{1}{\infty} \right\rangle = 0.$$

Poznámka: Zde není l'Hospital ta nejlepší volba.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - \operatorname{arctg}(x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2} \right) = \left\langle \frac{1}{\infty} - \frac{\pi/2}{\infty} \right\rangle = 0.$$

$$47. \lim_{x \rightarrow \infty} ((x+1)^{1/\ln(x)}) \stackrel{\infty^0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right)}.$$

$$\text{Teď } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{1}{1+0}}{=} 1,$$

$$\text{proto } \lim_{x \rightarrow \infty} ((x+1)^{1/\ln(x)}) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right)} = e^1 = e.$$

$$48. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{x^3 + 4x^2} - \sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt{x} + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(\sqrt{x^3 + 4x^2} - \sqrt{x^3 + 1})(\sqrt{x^3 + 4x^2} + \sqrt{x^3 + 1})}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3 + 4x^2} + \sqrt{x^3 + 1})} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x^2 - 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3 + 4x^2} + \sqrt{x^3 + 1})} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x^2 - 1}{\sqrt{x}(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})x^{3/2}(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}})} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2(4 - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}})} \right) = \left\langle \frac{4-0}{(1+0)(\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0})} \right\rangle = 2.$$

$$49. \lim_{x \rightarrow 0^+} (x\sqrt{1-x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((1-x)^{1/x}) \stackrel{\frac{1}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( e^{\frac{\ln(1-x)}{x}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(1-x)}{x} \right)}.$$

$$\text{Teď } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(1-x)}{x} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{-1}{1-x} \right) = -1, \quad \text{proto } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x\sqrt{1-x}) = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(1-x)}{x} \right)} = e^{-1}.$$

$$50. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{arctg}^3(2x)}{\ln^3(x+1)} \right) = \left\langle \frac{0}{0} \Rightarrow \text{l'H, moment} \right\rangle = \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{\ln(x+1)} \right) \right]^3 \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{[\operatorname{arctg}(2x)]'}{[\ln(x+1)]'} \right) \right]^3 \\ = \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{1}{4x^2+1} \cdot 2}{\frac{1}{x+1}} \right) \right]^3 = [2]^3 = 8. \text{ Masochisti si zkusí aplikovat l'Hospitala na tu původní limitu.}$$

$$51. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x)^{\sin(x)}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( e^{\sin(x) \ln(\sin(x))} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x) \ln(\sin(x)))} = \left\langle 0 \cdot \ln(0^+) = -0 \cdot \infty \right\rangle.$$

Co přesuneme do jmenovatele?  $\ln(\sin(x))$  už je dost komplikovaný a při přesunu dolů by se ještě zhoršil na  $[\ln(\sin(x))]^{-1}$ . Na druhou stranu když se to nechá nahoře, tak ten logaritmus l'Hospitalem zmizí. Lepší je tedy dát dolů ten sinus.

$$\text{Teď } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(\sin(x))}{(\sin(x))^{-1}} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{[\ln(\sin(x))]'}{[(\sin(x))^{-1}]'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\frac{1}{\sin(x)} \cos(x)}{-\sin(x)^{-2} \cos(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sin(x)) = 0.$$

$$\text{Proto } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x)^{\sin(x)}) = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x) \ln(\sin(x)))} = e^0 = 1.$$

$$52. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( e^x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \left\langle e^\infty \cdot \sin(0) = \infty \cdot 0 \right\rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{-x}} \right) \stackrel{\frac{0}{\infty}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{[\sin\left(\frac{1}{x}\right)]'}{[e^{-x}]'} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{-e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \right) \stackrel{\frac{\infty \cdot 1}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x}{x^2} \right) \\ \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{l'H}} 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{[e^x]'}{[x^2]'} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x}{2x} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{[e^x]'}{[2x]'} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x}{2} \right) = \infty.$$

$$53. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\arcsin(2\sqrt{x})}{\sqrt{x-x^2}} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{[\arcsin(2\sqrt{x})]'}{[\sqrt{x-x^2}]'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(2\sqrt{x})^2}} [2\sqrt{x}]'}{\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} [x-x^2]'} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} (1-2x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}\sqrt{1-4x}(1-2x)} \right) = \left\langle \frac{0}{0} \Rightarrow \text{zkus algebru} \right\rangle \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-4x}(1-2x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-4x}(1-2x)} \right) = 2.$$

Poznámka: Po prvním l'Hospitalovi jsme dostali  $\frac{0}{0}$ , bylo tedy možné znovu použít l'Hospitala. Zkuste to, je to hrůzné. Ukazuje to, že než se pokusíme o nějakou metodu, vyplatí se zjednodušit co nejvíce zkoumaný výraz.

$$54. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \left( \frac{1}{x} \right)^{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( e^{\sin(x) \ln\left(\frac{1}{x}\right)} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sin(x) \ln(x))} = \left\langle\left\langle -0 \cdot \ln(0^+) = 0 \cdot \infty \right\rangle\right\rangle.$$

Jednu část je třeba přesunout do jmenovatele, zkusíme ten sinus. Proč? Protože pak nahoře zůstane jen logaritmus, tudíž ho derivace zabije.  $\sin^{-1}$  se sice derivací zkomplikuje, ale snad to půjde udolat.

$$\begin{aligned} \text{Teď } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{-\ln(x)}{(\sin(x))^{-1}} \right) &\stackrel{\infty}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{[-\ln(x)]'}{[(\sin(x))^{-1}]'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{-\frac{1}{x}}{-(\sin(x))^{-2} \cos(x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin^2(x)}{x \cos(x)} \right) \stackrel{0}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{\cos(x) - x \sin(x)} \right) = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Tu problémovou limitu po prvním l'Hospitalovi lze také udělat takto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin^2(x)}{x \cos(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\text{Teď hlavně dosadit zpět do exponenciály: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \left( \frac{1}{x} \right)^{\sin(x)} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x) \ln\left(\frac{1}{x}\right))} = e^0 = 1.$$

$$55. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^a}{x-1} \right) = \left\langle\left\langle \frac{\infty^a}{\infty} \right\rangle\right\rangle. \text{ Hodnota } \infty^a \text{ závisí na znaménku } a, \text{ navíc } \infty^0 \text{ je neurčitý výraz.}$$

$$\text{Případy: } a < 0: \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^a}{x-1} \right) = \left\langle\left\langle \frac{1/\infty}{\infty} = \frac{0}{\infty} \right\rangle\right\rangle = 0.$$

$$a = 0: \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^a}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x-1} \right) \stackrel{\infty}{=} 0.$$

$$a > 0: \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^a}{x-1} \right) \stackrel{\infty}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} (a x^{a-1}) = \left\langle\left\langle a \cdot \infty^{a-1} \right\rangle\right\rangle = \begin{cases} 0, & a \in (0, 1); \\ 1, & a = 1; \\ \infty, & a > 1. \end{cases}$$

Teď se zase počítal zvlášť případ  $a = 1$ , protože  $\infty^0$  je neurčitý výraz.

$$\text{Tedy } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^a}{x-1} \right) = \begin{cases} 0, & a < 1; \\ 1, & a = 1; \\ \infty, & a > 1. \end{cases} \quad \text{Tohle by jste si měli umět tipnout.}$$

$$56. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\arctg(a/x)}{\sin(x)} \right) = \left\langle\left\langle \frac{\arctg(a/0^+)}{0^+} \right\rangle\right\rangle. \text{ Hodnota } a/0^+ \text{ závisí na znaménku } a, \text{ pro } a = 0 \text{ vyjde neučitý výraz.}$$

$$\text{Případy: } a < 0: \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\arctg(a/x)}{\sin(x)} \right) = \left\langle\left\langle \frac{\arctg(-\infty)}{0^+} = \frac{-\pi/2}{0^+} \right\rangle\right\rangle = -\infty.$$

$$a = 0: \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\arctg(a/x)}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\arctg(0)}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{0}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (0) = 0.$$

$$a > 0: \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\arctg(a/x)}{\sin(x)} \right) = \left\langle\left\langle \frac{\arctg(\infty)}{0^+} = \frac{\pi/2}{0^+} \right\rangle\right\rangle = \infty.$$

$$\text{Tedy } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\arctg(a/x)}{\sin(x)} \right) = \begin{cases} -\infty, & a < 0; \\ 0, & a = 0; \\ \infty, & a > 0. \end{cases}$$

$$57. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{ax}}{1-ax} \right) = \left\langle\left\langle \frac{e^{a \cdot \infty}}{1-a \cdot \infty} \right\rangle\right\rangle. \text{ Hodnota } a \cdot \infty \text{ závisí na hodnotě } a, \text{ pro } a = 0 \text{ vyjde neurčitý výraz.}$$

$$\text{Případy: } a < 0: \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{ax}}{1-ax} \right) = \left\langle\left\langle \frac{e^{-\infty}}{1+\infty} = \frac{0}{\infty} \right\rangle\right\rangle = 0.$$

$$a = 0: \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{ax}}{1-ax} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^0}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1) = 1.$$

$$a > 0: \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{ax}}{1-ax} \right) = \left\langle\left\langle \frac{e^{\infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \right\rangle\right\rangle \Rightarrow \text{l'H} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a e^{ax}}{-a} \right) = -\infty.$$

$$\text{Tedy } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{ax}}{1-ax} \right) = \begin{cases} 0, & a < 0; \\ 1, & a = 0; \\ -\infty, & a > 0. \end{cases}$$

58.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\ln(x+a)}{x-1} \right) = \left\langle \left\langle \frac{\ln((1+a)^+)}{0^+} \right\rangle \right\rangle$ . Výsledek závisí na znaménku čitatele.

Případy:  $-1 \leq a < 0$ : pak  $a+1 \in \langle 0, 1 \rangle$ , tedy  $\ln(a+1) < 0$  a  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\ln(x+a)}{x-1} \right) \stackrel{\frac{0^-}{0^+}}{=} -\infty$ .

$a = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\ln(x+a)}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\ln(x)}{x-1} \right) \stackrel{0}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{x} \right) = 1$ .

$a > 0$ : pak  $a+1 > 1$ , tedy  $\ln(a+1) > 0$  a  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\ln(x+a)}{x-1} \right) \stackrel{\frac{0^+}{0^+}}{=} \infty$ .

Tedy  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{e^{ax}}{1-ax} \right) = \begin{cases} -\infty, & a < 0; \\ 1, & a = 0; \\ \infty, & a > 0. \end{cases}$

59.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(x)}{x^a} \right) = \left\langle \left\langle \frac{\infty}{\infty^a} \right\rangle \right\rangle$ .

Aby šel použít l'Hospital, muselo by platit  $\infty^a = \infty$ . To určitě platí pro  $a > 0$ , pak

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(x)}{x^a} \right) \stackrel{\infty}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a x^a} \right) = 0$ .

Protože je obecně  $\infty^0$  neurčitý výraz, mohlo by i zde vyjít nekonečno, takže se podíváme, zda pro  $a = 0$  také vyjde neurčitý podíl:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(x)}{x^a} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(x)}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x))$ . Nevyšel.

Takže jediný l'Hospitalův případ je  $a > 0$  vyřešený výše.

60.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sin(a\pi x)}{x-1} \right) = \left\langle \left\langle \frac{\sin(a\pi)}{0} \right\rangle \right\rangle$ . Jediný výraz, který má ve jmenovateli nulu a může vést na konvergenci, je když je také nula v čitateli. To se stane, když je  $a$  celé číslo. Pak

$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sin(a\pi x)}{x-1} \right) \stackrel{0}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{a \cos(a\pi x)}{1} \right) = a \cos(a\pi) = a(-1)^a$ .

61.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{e^{cx}} \right) = \left\langle \left\langle \frac{\infty}{e^{c \cdot \infty}} \right\rangle \right\rangle$ . Jediný výraz, který má v čitateli nekonečno a může vést na konvergenci, je když

je také nekonečno ve jmenovateli. To se stane, když je  $c > 0$ . Pak  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{e^{cx}} \right) \stackrel{\infty}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{c e^{cx}} \right) \stackrel{\frac{1}{\infty}}{=} 0$ .

62.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} ((ax-2) \ln(x-1)) = \left\langle \left\langle (a-2) \ln(0^+) = -(a-2) \cdot \infty \right\rangle \right\rangle$ . Jediná možnost, jak dostat konvergenci ze součinu, kde je jedna část nekonečná, je zařídit, aby druhá byla nulová. To se stane, když je  $a = 2$ . Pak

$\lim_{x \rightarrow 1^+} ((ax-2) \ln(x-1)) \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{2x-2}} \right) \stackrel{\infty}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{2}{(2x-2)^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2(x-1)) = 0$ .

63.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\ln(x+b)}{(x-1)^2} \right) = \left\langle \left\langle \frac{\ln(1+b)}{0^+} \right\rangle \right\rangle$ . Pro  $b < -1$  zadaná limita vůbec nemá smysl. Omezíme se tedy na  $b \geq -1$ .

Jediný výraz, který má ve jmenovateli nulu a může vést na konvergenci, je když je také nula v čitateli. To se stane, když je  $b = 0$ . Pak

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\ln(x+b)}{(x-1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\ln(x)}{(x-1)^2} \right) \stackrel{0}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\frac{1}{x}}{2(x-1)} \right) \stackrel{\frac{1}{0^+}}{=} \infty$ .

Takže limita nekonverguje pro žádnou hodnotu  $b$ .

64.  $D(f) = (-\infty, 1)$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{e^\infty}{\sqrt{\infty}} = \infty \implies \text{l'H} \right\rangle \right\rangle = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-e^{-x}}{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2\sqrt{1-x} e^{-x}) \stackrel{\infty \cdot e^\infty}{=} \infty$ .

Trik:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} \right) = \left| \begin{array}{l} y = -x \\ x \rightarrow -\infty \implies y \rightarrow \infty \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{e^y}{\sqrt{1+y}} \right) = \left\langle \left\langle \frac{\infty}{\infty} \implies \text{l'H} \right\rangle \right\rangle = \dots$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{e^{-1}}{\sqrt{0^+}} = \frac{e^{-1}}{0^+}, e^{-1} > 0 \right\rangle \right\rangle = \infty$ .

65.  $D(f) = (3, \infty)$ .  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{\ln(0^+)}{9-9^+} = \frac{-\infty}{0^-} \right\rangle \right\rangle = \infty$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{\ln(\infty)}{9-\infty} = \frac{\infty}{-\infty} \implies \text{l'H} \right\rangle \right\rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{2}{2x-6}}{-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{-x(2x-6)} \right) = \left\langle \left\langle \frac{1}{-\infty \cdot \infty} = -\frac{1}{\infty} \right\rangle \right\rangle = 0$ .

**66.**  $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{2 - \frac{4}{x}} \right) \right) = \left\langle \frac{\infty}{2-0} \implies \operatorname{arctg}(\infty) \right\rangle = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (f(x)) = \left\langle \frac{4}{0^+} \implies \operatorname{arctg}(\infty) \right\rangle = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (f(x)) = \left\langle \frac{4}{0^-} \implies \operatorname{arctg}(-\infty) \right\rangle = -\frac{\pi}{2}. \quad \text{Vidíme, že oboustranná } \lim_{x \rightarrow 2} (f(x)) \text{ neexistuje.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{2 - \frac{4}{x}} \right) \right) = \left\langle -\frac{\infty}{2-0} \implies \operatorname{arctg}(-\infty) \right\rangle = -\frac{\pi}{2}.$$

**67.**  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  neboť  $1 + \sin(x) \geq 0$  vždy.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \left\langle \frac{\text{omez}}{\infty} \right\rangle = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{[1 - \sqrt{1 + \sin(x)}]'}{[x^3]'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{-\frac{\cos(x)}{2\sqrt{1 + \sin(x)}}}{3x^2} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\cos(x)}{6x^2 \sqrt{1 + \sin(x)}} \right) \stackrel{\frac{1}{0^+}}{=} -\infty.$$

Derivace nebyla moc pěkná, pro odmocniny většinou lépe funguje její odstranění, zkusíme to u příští limity.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) &= \left\langle \frac{0}{0}, \text{ trik pro } \sqrt{\phantom{x}} - \sqrt{\phantom{x}} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{(1 - \sqrt{1 + \sin(x)})(1 + \sqrt{1 + \sin(x)})}{x^3(1 + \sqrt{1 + \sin(x)})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{-\sin(x)}{x^3(1 + \sqrt{1 + \sin(x)})} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \sin(x)}} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\sin(x)}{x^3} \right) \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{[\sin(x)]'}{[x^3]'} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\cos(x)}{3x^2} \right) \stackrel{\frac{1}{0^+}}{=} -\infty. \end{aligned}$$

Kupodivu to bylo horší než l'Hospital. Porovnáním máme oboustrannou  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)) = -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \left\langle \frac{\text{omez}}{-\infty} \right\rangle = 0.$$

**68.**  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$  protože tam  $\frac{x}{x-1} > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \ln \left( \frac{1}{1-1/x} \right) \right) = \ln(1) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x)) = \left\langle \ln \left( \frac{1}{0^+} \right) \right\rangle \stackrel{\ln(\infty)}{=} \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) = \left\langle \ln \left( \frac{0^-}{-1} \right) \right\rangle \stackrel{\ln(0^+)}{=} -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \ln \left( \frac{1}{1-1/x} \right) \right) = \ln(1) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{69. } D(f) &= \mathbb{R}. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) \stackrel{\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg}(x)}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{[\pi - 2 \operatorname{arctg}(x)]'}{[x^{-1}]'} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{-2}{x^2+1}}{\frac{-1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} \right) = 2; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) \stackrel{(-\infty) \cdot 2\pi}{=} -\infty.$$

**70.**  $D(f) = (-\infty, 0) \cup \langle \frac{2}{3}, \infty \rangle$ ;

protože  $-1 \leq \frac{1-x}{1-2x} \implies (-\infty, \frac{1}{2}) \cup \langle \frac{2}{3}, \infty \rangle$  a  $\frac{1-x}{1-2x} \leq 1 \implies (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \arccos \left( \frac{\frac{1-x}{1-2x} - 1}{\frac{1}{x} - 2} \right) \right) = \arccos \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3};$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} (f(x)) = \arccos(-1) = \pi;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) = \arccos(1) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \arccos \left( \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} - 2} \right) \right) = \arccos \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

**71.**  $f(x) = e^{\frac{\ln(\operatorname{arctg}(x))}{x}} \implies D(f) = (0, \infty)$  protože tam  $\operatorname{arctg}(x) > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(\operatorname{arctg}(x))}{x} \right)} = \left\langle \frac{\ln(\pi/2)}{\infty} \right\rangle = e^0 = 1;$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(\operatorname{arctg}(x))}{x} \right)} = \left\langle \left\langle \frac{\ln(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} \implies e^{-\infty} \right\rangle \right\rangle = 0.$$

**72.**  $D(f) = (0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, \infty)$  protože  $\ln(x) \neq -1 \implies x \neq e^{-1}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) \stackrel{\infty}{\underset{\text{l'H}}{=}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{[\ln(x^2 + 1)]'}{[\ln(x) + 1]'} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \stackrel{\frac{2}{1+0}}{=} 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow (1/e)^+} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{\ln(1/e^2+1)}{0^+}, \ln(\frac{1}{e^2} + 1) > 0 \right\rangle \right\rangle = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow (1/e)^-} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{\ln(1/e^2+1)}{0^-}, \ln(\frac{1}{e^2} + 1) > 0 \right\rangle \right\rangle = -\infty. \quad \text{Oboustranná } \lim_{x \rightarrow (1/e)} (f(x)) \text{ neexistuje.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) \stackrel{\frac{0}{-\infty+1}}{=} 0.$$

**73.**  $f(x) = e^{\frac{\ln[\arccos(x)]}{x+1}} \implies D(f) = (-1, 1)$

protože  $x \neq -1$ ,  $\arccos \implies x \in (-1, 1)$ ,  $\arccos(x) > 0 \implies x \neq 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x)) = e^{\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{\ln[\arccos(x)]}{x+1} \right)} = \left\langle \left\langle \frac{\ln(0^+)}{2} = \frac{-\infty}{2} \implies e^{-\infty} \right\rangle \right\rangle = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (f(x)) = e^{\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left( \frac{\ln[\arccos(x)]}{x+1} \right)} = \left\langle \left\langle \frac{\ln(\pi)}{0^+}, \ln(\pi) > 0 \implies e^{\infty} \right\rangle \right\rangle = \infty.$$

**74.**  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$  protože tam  $x^2 - x > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) \stackrel{\infty}{\underset{\text{l'H}}{=}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{[2^x - 1]'}{[\sqrt{x^2 - x}]'} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(2)2^x}{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2 \ln(2)2^x \sqrt{x^2 - x}}{2x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (2 \ln(2)2^x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{2 - \frac{1}{x}} \right) = \left\langle \left\langle 2^{\infty} \frac{\sqrt{1-0}}{2-0}, \ln(2) > 0 \right\rangle \right\rangle = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x)) \stackrel{\frac{1}{0^+}}{=} \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) \stackrel{\frac{0}{\text{l'H}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{[2^x - 1]'}{[\sqrt{x^2 - x}]'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\ln(2)2^x}{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2 \ln(2)2^x \sqrt{x^2 - x}}{2x - 1} \right) = \left\langle \left\langle \frac{2 \ln(2) \cdot 0}{-1} \right\rangle \right\rangle = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{2^{-\infty} - 1}{(-\infty)^2 - (-\infty)} = \frac{0-1}{\infty+\infty} = \frac{-1}{\infty} \right\rangle \right\rangle = 0.$$

**75.**  $f(x) = \frac{e^{x \ln[\cosh(\frac{1}{x})]}}{\operatorname{arctg}(x)} \implies D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

protože  $\operatorname{arctg}(x) \neq 0 \implies x \neq 0$ ,  $\cosh(1/x) > 0$  vždy.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{e^{\infty \cdot \ln(\cosh(1/\infty))}}{\operatorname{arctg}(\infty)} = \frac{e^{\infty \cdot \ln(\cosh(0))}}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} e^{\infty \cdot \ln(1)} = \frac{2}{\pi} e^{\infty \cdot 0} \right\rangle \right\rangle$$

nejprve musíme najít limitu v exponenciále.

$$\text{Máme } \lim_{x \rightarrow \infty} (x \ln[\cosh(\frac{1}{x})]) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln[\cosh(\frac{1}{x})]}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{0}{\text{l'H}}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{\sinh(1/x) \cdot (-1)}{\cosh(1/x) \cdot x^2}}{\frac{-1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{tgh}(\frac{1}{x})) = \operatorname{tgh}(0) = 0,$$

$$\text{proto } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \frac{2}{\pi} e^0 = \frac{2}{\pi}.$$

L'Hospital se dá zjednodušit trikem, ukážeme to u další limity.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{e^{0 \cdot \ln(\cosh(1/0^+))}}{\operatorname{arctg}(0^+)} = \frac{e^{0 \cdot \ln(\cosh(\infty))}}{0^+} = \frac{e^{0 \cdot \ln(\infty)}}{0^+} = \frac{e^{0 \cdot \infty}}{0^+} \right\rangle \right\rangle$$

nejprve musíme najít limitu v exponenciále.

$$\text{Máme } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln[\cosh(\frac{1}{x})]) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln[\cosh(\frac{1}{x})]}{\frac{1}{x}} \right) = \left| x \rightarrow 0^+ \implies y \rightarrow \infty \right| = \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln[\cosh(y)]}{y} \right)$$

$$\stackrel{\infty}{\underset{\text{l'H}}{=}} \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}}{1} \right) = \lim_{y \rightarrow \infty} (\operatorname{tgh}(y)) = 1, \quad \text{proto } \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) \stackrel{\frac{e^1}{0^+}}{=} \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{e^{0 \cdot \ln(\cosh(1/0^-))}}{\operatorname{arctg}(0^-)} = \frac{e^{0 \cdot \ln(\cosh(-\infty))}}{0^-} = \frac{e^{0 \cdot \ln(\infty)}}{0^-} = \frac{e^{0 \cdot \infty}}{0^-} \right\rangle \right\rangle$$

nejprve musíme najít limitu v exponenciále. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x \ln \left[ \cosh \left( \frac{1}{x} \right) \right] \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\ln \left[ \cosh \left( \frac{1}{x} \right) \right]}{\frac{1}{x}} \right) = \left| x \rightarrow 0^- \implies y = \frac{1}{x} \implies y \rightarrow -\infty \right| = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left( \frac{\ln \left[ \cosh(y) \right]}{y} \right) = \dots = -1,$$

proto  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) \stackrel{\frac{e^{-1}}{0^-}}{=} -\infty$ . Vidíme, že oboustranná  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))$  neexistuje.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{e^{-\infty \cdot \ln(\cosh(-1/\infty))}}{\operatorname{arctg}(-\infty)} = \frac{e^{-\infty \cdot \ln(\cosh(0))}}{-\pi/2} = -\frac{2}{\pi} e^{-\infty \cdot \ln(1)} = -\frac{2}{\pi} e^{-\infty \cdot 0} \right\rangle \right\rangle$$

nejprve musíme najít limitu v exponenciále.

$$\text{Máme } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x \ln \left[ \cosh \left( \frac{1}{x} \right) \right] \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\ln \left[ \cosh \left( \frac{1}{x} \right) \right]}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{0}{l'H}}{\lim_{x \rightarrow -\infty}} \left( \operatorname{tgh} \left( \frac{1}{x} \right) \right) = \operatorname{tgh}(0) = 0,$$

$$\text{proto } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{e^0}{\operatorname{arctg}(-\infty)} = \frac{1}{-\pi/2} \right\rangle \right\rangle = -\frac{2}{\pi}.$$

**76.** Podmínky:  $x > 0$ ,  $x \neq a$ . Proto  $D(f) = \begin{cases} (0, \infty), & a \leq 0; \\ (0, a) \cup (a, \infty), & a > 0. \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) \stackrel{\frac{\infty}{l'H}}{\lim_{x \rightarrow \infty}} \left( \frac{1}{x} \right) = 0 \text{ pro všechna } a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{\ln(0^+)}{0^+ - a} = \frac{-\infty}{0^+ - a} \right\rangle \right\rangle = \begin{cases} -\infty, & a \leq 0; \\ \infty, & a > 0. \end{cases}$$

Pokud  $a > 0$ :  $\lim_{x \rightarrow a^+} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{\ln(a)}{0^+} \right\rangle \right\rangle$ . Zde je nutno si uvědomit, že  $\ln(a) > 0$  pro  $a > 1$ ,  $\ln(a) < 0$  pro  $a \in (0, 1)$

a pro  $a = 1$  je to případ  $\frac{0}{0}$ , který se dělá l'Hospitalem:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\ln(x)}{x-1} \right) \stackrel{\frac{0}{l'H}}{\lim_{x \rightarrow 1^+}} \left( \frac{1}{x} \right) = 1$ .

$$\text{Proto } \lim_{x \rightarrow a^+} (f(x)) = \begin{cases} -\infty, & a \in (0, 1); \\ 1, & a = 1; \\ \infty, & a > 1. \end{cases} \quad \text{Podobně } \lim_{x \rightarrow a^-} (f(x)) = \begin{cases} \infty, & a \in (0, 1); \\ 1, & a = 1; \\ -\infty, & a > 1. \end{cases}$$

**77.**  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \left\langle \left\langle e^{1-1/\infty} = e^{1-0} \right\rangle \right\rangle = e. \quad \text{Závěr: V nekonečnu je vodorovná asymptota } y = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) = \left\langle \left\langle e^{1-1/0^+} = e^{1-\infty} = e^{-\infty} \right\rangle \right\rangle = 0. \quad \text{V } x = 0 \text{ zatím není potvrzena svislá asymptota.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) = \left\langle \left\langle e^{1-1/0^-} = e^{1-(-\infty)} = e^{\infty} \right\rangle \right\rangle = \infty. \quad \text{Závěr: V } x = 0 \text{ je svislá asymptota.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \left\langle \left\langle e^{1+1/\infty} = e^{1+0} \right\rangle \right\rangle = e. \quad \text{Závěr: V mínus nekonečnu je vodorovná asymptota } y = e.$$

**78.**  $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} \right) = \infty; \text{ není vodorovná, může být šikmá, zkusíme}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} \right) = 1, \text{ možná je šikmá s } A = 1,$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x - 1 - x^2 + x}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 1}{x - 1} \right) = 2.$$

Závěr: V nekonečnu je asymptota  $y = x + 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x)) \stackrel{\frac{1}{0^+}}{=} \infty. \quad \text{Závěr: V } x = 1 \text{ je svislá asymptota.}$$

Jen cvičně:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x)) \stackrel{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$ ; potvrzuje to nezávisle tu svislou.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} \right) = -\infty; \text{ není vodorovná, může být šikmá, zkusíme}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} \right) = 1, \text{ možná je šikmá s } A = 1,$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + x - 1 - x^2 + x}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x - 1}{x - 1} \right) = 2.$$

Závěr: V mínus nekonečnu je asymptota  $y = x + 2$ .

**79.**  $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 1 + \frac{1}{x-1}) = \infty$ ; není vodorovná, může být šikmá, zkusíme

$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x-1)} \right) = 2$ , možná je šikmá s  $A = 2$ ,

$B = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 1 + \frac{1}{x-1} - 2x) = -1$ . Závěr: V nekonečnu je asymptota  $y = 2x - 1$ .

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x)) \stackrel{1+\frac{1}{0^+}}{=} \infty$ . Závěr: V  $x = 1$  je svislá asymptota.

Jen cvičně:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x)) \stackrel{1+\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$ ; potvrzuje to nezávisle tu svislou.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1 + \frac{1}{x-1}) = -1$ . Závěr: V mínus nekonečnu je vodorovná asymptota  $y = -1$ .

**80.**  $D(f) = (0, \infty)$  protože  $e^x > 0$ , je  $x e^x > 0 \iff x > 0$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) \stackrel{\ln(\infty)}{=} \infty$ ; není vodorovná, může být šikmá, zkusíme

$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(x e^x)}{x} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x(x+1)}{x e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x} \right) = 1$ ,

možná je šikmá s  $A = 1$ ,

$B = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x e^x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x e^x) - \ln(e^x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \ln\left(\frac{x e^x}{e^x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x)) = \infty$ .

Závěr: V nekonečnu není žádná asymptota.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) \stackrel{\ln(0^+ \cdot 1)}{=} -\infty$ . Závěr: V  $x = 0$  je svislá asymptota.

**81.**  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ; protože  $e^x - e^{-x} = 0 \iff e^{2x} = 1$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) \stackrel{\frac{\infty}{\infty-0}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1 - e^{-2x}} \right) \stackrel{\frac{\infty}{1-0}}{=} \infty$ ; není vodorovná, může být šikmá, zkusíme

$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 - e^{-2x}} \right) = 1$ , možná je šikmá s  $A = 1$ ,

$B = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x e^x}{e^x - e^{-x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{e^{2x} - 1} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2e^{2x}} \right) = 0$ .

Závěr: V nekonečnu je asymptota  $y = x$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) \stackrel{\frac{0 \cdot 1}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{e^x - e^{-x}} \right) \stackrel{\frac{0}{1'H}}{=} 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{e^x + e^{-x}} \right) = \frac{1}{2}$ ;

v  $x = 0$  zatím není potvrzena svislá asymptota.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) \stackrel{\frac{0 \cdot 1}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{x}{e^x - e^{-x}} \right) \stackrel{\frac{0}{1'H}}{=} 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{e^x + e^{-x}} \right) = \frac{1}{2}$ .

Závěr: V  $x = 0$  není žádná asymptota.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \left\langle \frac{-\infty \cdot 0}{0-\infty} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{1 - e^{-2x}} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2e^{-2x}} \right) = 0$ .

Závěr: V mínus nekonečnu je vodorovná asymptota  $y = 0$ .

**82.**  $D(f) = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ ; protože  $1 + \frac{1}{x} > 0 \iff \frac{x+1}{x} > 0$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) \stackrel{\frac{\infty \cdot 0}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{0}{1'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) = 1$ .

Závěr: V nekonečnu je vodorovná asymptota  $y = 1$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) \stackrel{\frac{0 \cdot \ln(\infty)}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{\infty}{1'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{1}{\infty}}{=} 0$ .

Závěr: V  $x = 0$  není žádná asymptota.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (f(x)) \stackrel{-1 \cdot \ln(0^+)}{=} \infty$ . Závěr: V  $x = -1$  je svislá asymptota.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) \stackrel{\frac{-\infty \cdot 0}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{0}{1'H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) = 1$ .

Závěr: V mínus nekonečnu je vodorovná asymptota  $y = 1$ .

**83.**  $D(f) = (0, 1) \cup (1, \infty)$ ; protože tam  $\ln(x) \neq 0$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) \stackrel{\infty}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{2\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right) = \infty$ ; není vodorovná, může být šikmá, zkusíme

$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln(x)\sqrt{x}} \right) = 0$ , možná je šikmá s  $A = 0$ ,

$B = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \infty$ . Závěr: V nekonečnu není žádná asymptota.

Poznámka: Když vyjde  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f) = \infty$  a  $A = 0$ , tak už nemůže být asymptota (s  $A = 0$  by byla vodorovná, ale ta je vyloučena tím nekonečnem), není nutno počítat  $B$ .

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x)) \stackrel{\frac{1}{0^+}}{=} \infty$ . Závěr: V  $x = 1$  je svislá asymptota.

Jen cvičně:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x)) \stackrel{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$ ; potvrzuje to nezávisle tu svislou.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{0}{\ln(0^+)} = -\frac{0}{\infty} \right\rangle \right\rangle = 0$ . Závěr: V  $x = 0$  není žádná asymptota.

84.  $D(f) = (-1, 0) \cup (0, \infty)$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) \stackrel{\infty}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x+1} \right) = 0$ . Závěr: V nekonečnu je vodorovná asymptota  $y = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x+1} \right) = 1$ . V  $x = 0$  zatím není potvrzena svislá asymptota.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{x+1} \right) = 1$ . Závěr: V  $x = 0$  není žádná asymptota.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (f(x)) \stackrel{\frac{\ln(0^+)}{-1}}{=} \infty$ . Závěr: V  $x = -1$  je svislá asymptota.

85.  $f(x) = e^{\frac{\ln(\sinh(x))}{x}} \implies D(f) = (0, \infty)$ ; protože  $\sinh(x) > 0 \implies x > 0$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(\sinh(x))}{x} \right)} \stackrel{\infty}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\cotgh(x)) = e^1 = e$ .

Závěr: V nekonečnu je vodorovná asymptota  $y = e$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(\sinh(x))}{x} \right)} = \left\langle \left\langle \frac{\ln(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} \right\rangle \right\rangle \stackrel{e^{-\infty}}{=} 0$ . Závěr: V  $x = 0$  není žádná asymptota.

86.  $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \left\langle \left\langle \frac{\infty \cdot \text{omez}}{\infty} \right\rangle \right\rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x-1} \sin(\pi x) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} \sin(\pi x) \right) = \left\langle \left\langle \infty \cdot \text{omez} \right\rangle \right\rangle$ .

Tady algebra limit ani standardní postup nepomůže, jen zkušenost.  $\sin(\pi x)$  kolísá mezi 1 a  $-1$ , takže cestou do nekonečna se  $f$  rovná občas přesně  $\frac{x}{1-1/x} \rightarrow \infty$  a občas přesně  $-\frac{x}{1-1/x} \rightarrow -\infty$ . Tyto možnosti se opakují střídavě bez přestání, takže  $f$  cestou doprava bez přestání osciluje a velikost oscilace se zvětšuje. Závěr:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))$  neexistuje. Proto není v nekonečnu žádná asymptota.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x)) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\sin(\pi x)}{x-1} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} (\pi \cos(\pi x)) = -\pi$ .

V  $x = 0$  zatím není potvrzena svislá asymptota.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x)) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{\sin(\pi x)}{x-1} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} (\pi \cos(\pi x)) = -\pi$ .

Závěr: V  $x = 1$  není žádná asymptota.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x-1} \sin(\pi x) \right) = \left\langle \left\langle \infty \cdot \text{omez} \right\rangle \right\rangle$ . Stejný problém jako v nekonečnu, stejný závěr.

87.  $\frac{\sin(3x)}{x}$  je spoj. na svém def. oboru, ten obsahuje  $(-\infty, 0)$ , kde  $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$ , proto je  $f$  spoj. na  $(-\infty, 0)$ .  $1-x$  je spoj. na  $\mathbb{R}$  a  $f(x) = 1-x$  na  $\langle 0, 1 \rangle$ , proto je  $f(x)$  spoj. na  $(0, 1)$ , v krajních bodech je jednostr. spoj.  $e^{1/(1-x)}$  je spoj. na svém def. oboru, ten obsahuje  $(1, \infty)$ , kde  $f(x) = e^{1/(1-x)}$ , proto je  $f$  spoj. na  $(1, \infty)$ .

Spojitosť v  $a = 0$ :  $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) = \left\langle \left\langle x \rightarrow 0^+ \implies x > 0, x < 1 \right\rangle \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = 1$ ;

$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) = \left\langle \left\langle x \rightarrow 0^- \implies x < 0 \right\rangle \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\sin(3x)}{x} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{l'H}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{3 \cos(3x)}{1} \right) = 3$ .

$f(0^+) \neq f(0^-) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x))$  neex., tedy  $f$  není spojitá v 0. Jednostranné limity konvergují a nerovnaží se, tedy je tam skoková nespojitost.  $f(0) = 1 = f(0^+)$ , proto je  $f$  spojitá v 0 zprava.

Poznámka: Alternativní výpočet druhé limity je substitucí a známou tabulkovou limitou.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\sin(3x)}{x} \right) = \left| \begin{array}{l} y = 3x \\ x = \frac{1}{3}y \\ x \rightarrow 0^- \implies y \rightarrow 0^- \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left( 3 \frac{\sin(y)}{y} \right) = 3 \cdot 1 = 3.$$

Spojitosť v  $a = 1$ :

$$f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x)) = \langle\langle x \rightarrow 1^+ \implies x > 1 \rangle\rangle = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{1/(1-x)}) = \langle\langle \frac{1}{0^-} = -\infty \implies e^{-\infty} \rangle\rangle = 0;$$

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x)) = \langle\langle x \rightarrow 1^- \implies x < 1, x > 0 \rangle\rangle = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0.$$

$$f(1^+) = f(1^-) \implies \lim_{x \rightarrow 1} (f(x)) = 0 = f(1), \text{ proto je } f \text{ spojitá v } 1.$$

Závěr:  $f$  je spojitá na  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ , v nule je skoková nespojitost, je tam spojitá zprava.

**88.**  $2 \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$  je spoj. na svém def. oboru, ten obsahuje  $(-\infty, 0)$ , kde  $f(x) = 2 \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$ , proto je  $f$  spoj. na  $(-\infty, 0)$ .  $x - \pi$  je spoj. na  $\mathbb{R}$  a  $f(x) = x - \pi$  na  $(0, 1)$ , proto je  $f(x)$  spoj. na  $(0, 1)$ , v 1 je spoj. zleva.

$\ln(x-1)$  je spoj. na svém def. oboru, ten obsahuje  $(1, \infty)$ , kde  $f(x) = \ln(x-1)$ , proto je  $f$  spoj. na  $(1, \infty)$ .

$$\text{Spojitosť v } a = 0: f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) = \langle\langle x \rightarrow 0^+ \implies x > 0, x < 1 \rangle\rangle = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \pi) = -\pi;$$

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) = \langle\langle x \rightarrow 0^- \implies x < 0 \rangle\rangle = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})) = \langle\langle \operatorname{arctg}(\frac{1}{0^-}) = \operatorname{arctg}(-\infty) \rangle\rangle = -\pi.$$

$$f(0^+) = f(0^-) \implies \lim_{x \rightarrow 0} (f(x)) = -\pi \neq 1 = f(0), \text{ proto } f \text{ není spojitá v } 0. \lim_{x \rightarrow 0} (f(x)) \text{ konverguje a není rovna } f(0), \text{ tedy je tam odstranitelná nespojitost.}$$

$$\text{Spojitosť v } a = 1: f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x)) = \langle\langle x \rightarrow 1^+ \implies x > 1 \rangle\rangle = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln(x-1)) = \langle\langle \ln(0^+) \rangle\rangle = -\infty;$$

je jednostranná limita, která nekonverguje, proto  $f$  není spojitá v 1 a je tam podstatná nespojitost.

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x)) = \langle\langle x \rightarrow 1^- \implies x < 1, x > 0 \rangle\rangle = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - \pi) = 1 - \pi = f(1).$$

V bodě 1 je tedy  $f$  spojitá zleva.

Závěr:  $f$  je spojitá na  $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ , v nule je odstranitelná nespojitost, v jedničce podstatná,  $f$  je tam spojitá zleva.

**89.** Problém je evidentně spojitost v nule. Ta platí, jestliže  $f(0^+) = f(0) = f(0^-)$ . Zde máme

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(\sin(x) + x + 1)}{\ln(x + 1)} \right) \stackrel{0}{\text{I'H}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\frac{\cos(x)+1}{\sin(x)+x+1}}{\frac{1}{x+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{(\cos(x) + 1)(x + 1)}{\sin(x) + x + 1} \right) = 2;$$

$$f(0) = a; \quad f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + a) = a.$$

Tyto tři hodnoty se budou rovnat při volbě  $a = 2$ .

**90.** Problém je evidentně spojitost v nule. Ta platí, jestliže  $f(0^+) = f(0) = f(0^-)$ . Zde máme

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{bx} - 1}{x} \right) \stackrel{0}{\text{I'H}} \lim_{x \rightarrow 0^+} (b e^x) = b;$$

$$f(0) = 4; \quad f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{x + a}{x + 2} \right) = \frac{a}{2}.$$

Tyto tři hodnoty se budou rovnat při volbě  $a = 8$  a  $b = 4$ .

**91.**  $D(f) = (-\infty, 0)$ . Důkaz prostoty: Necht'  $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ .  $f(x_1) = f(x_2) \implies \ln(1 - e^{2x_1}) = \ln(1 - e^{2x_2}) \implies 1 - e^{2x_1} = 1 - e^{2x_2} \implies e^{2x_1} = e^{2x_2} \implies 2x_1 = 2x_2 \implies x_1 = x_2$ .

Při úpravách se využilo toho, že logaritmus i exponenciála jsou prosté, takže rovnost funkčních hodnot implikuje rovnost argumentů.

Poznámka: Prostota také vyplyne z monotonie této funkce, což se dokáže asi nejjednodušeji pomocí derivace.

$$f'(x) = \frac{-2e^{2x}}{1 - e^{2x}} < 0 \text{ na } D(f), \text{ proto je } f \text{ klesající a tedy i prostá.}$$

Inverzní funkce:

$$y = \ln(1 - e^{2x}) \iff e^y = 1 - e^{2x} \iff e^{2x} = 1 - e^y \iff 2x = \ln(1 - e^y) \iff x = \frac{1}{2} \ln(1 - e^y),$$

proto  $f_{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln(1 - e^y)$ . Je to opravdu inverzní funkce k  $f$ ?

$$\text{Pro } x \in D(f): f_{-1}(f(x)) = f_{-1}(\ln(1 - e^{2x})) = \frac{1}{2} \ln(1 - e^{\ln(1 - e^{2x})}) = \frac{1}{2} \ln(1 - (1 - e^{2x})) = \frac{1}{2} \ln(e^{2x}) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x.$$

$$\text{Pro } y \in D(f_{-1}): f(f_{-1}(y)) = \ln(1 - e^{2 \cdot \frac{1}{2} \ln(1 - e^y)}) = \ln(1 - e^{\ln(1 - e^y)}) = \ln(1 - (1 - e^y)) = \ln(e^y) = y.$$

Důkaz hotov.

$$H(f_{-1}) = D(f) = (-\infty, 0).$$

$$y_1 < y_2 \implies \langle\langle e^y \text{ je } \nearrow \rangle\rangle \implies e^{y_1} < e^{y_2} \implies 1 - e^{y_1} > 1 - e^{y_2} \implies \langle\langle \ln(z) \text{ je } \nearrow \rangle\rangle \\ \implies \ln(1 - e^{y_1}) > \ln(1 - e^{y_2}) \implies f_{-1}(y_1) > f_{-1}(y_2).$$

$f_{-1}$  je tedy klesající (a tudíž monotónní), právě provedená úvaha je zároveň důkaz.

Alternativa:  $D(f_{-1}) = (-\infty, 0)$ ,  $[f_{-1}(y)]' = \frac{1}{2} \frac{-e^y}{1-e^y} < 0$  pro  $y \in D(f_{-1})$ , funkce je klesající na  $D(f_{-1}) = (-\infty, 0)$ .

Dokonce máme větu, že funkce inverzní k funkci monotónní má stejnou monotónii a na začátku jsme ukázali, že  $f$  je klesající.

**92.** Obecná definice  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = A$ : Pro libovolně dané okolí  $U = U(A)$  jsme schopni najít prstencové okolí  $P = P(a)$  takové, že pro všechna  $x \in P$  máme  $f(x) \in U$ .

Přepis pro vlastní bod a vlastní limitu:

Pro libovolné  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že když  $x$  je libovolné číslo splňující  $0 < |x - a| < \delta$ , tak  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Toto je třeba dokázat. Přesně: Je nám **dáno libovolné**  $\varepsilon > 0$ . Potřebujeme najít  $\delta > 0$  tak, abychom z nerovnosti  $|x - (-1)| < \delta$  (a  $x \neq -1$ ) dostali také  $|(3x + 5) - 2| < \varepsilon$ .

$$\text{Teď: } |(3x + 5) - 2| < \varepsilon \iff |3x + 3| < \varepsilon \iff 3|x + 1| < \varepsilon.$$

Toto máme splnit pomocí nerovnice  $|x - (-1)| = |x + 1| < \delta$ , což se podaří, pokud **zvolíme**  $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$ . Pak platí (viz předchozí úpravy) kýžená implikace  $|x - (-1)| < \delta \implies |(3x + 5) - 2| < \varepsilon$ , důkaz hotov.

**93.** Je nám **dáno libovolné**  $\varepsilon > 0$ . Potřebujeme najít  $\delta > 0$  tak, abychom z nerovnosti  $|x - 2| < \delta$  (a  $x \neq 2$ )

$$\text{dostali také } \left| \frac{x^2 + 5}{x + 1} - 3 \right| < \varepsilon.$$

$$\text{Teď: } \left| \frac{x^2 + 5}{x + 1} - 3 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{(x - 1)(x - 2)}{x + 1} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| |x - 2| < \varepsilon.$$

Toto máme splnit pomocí nerovnice  $|x - 2| < \delta$ , ale zlobí tam ten zlomek. Zde se musí použít finta. Víme, že  $x$  je přibližně 2, pak je ten zlomek přibližně  $\frac{1}{3}$ , takže máme v zásadě nerovnost  $\frac{1}{3}|x - 2| < \varepsilon$ . Odtud by mohlo stačit zvolit  $\delta = 3\varepsilon$ , jenže k té nerovnosti jsme nedošli korektně, jen odhadováním. Potřebujeme přesnou matematiku.

Jedna možnost je prohlásit, že ať už to  $\delta$  zvolíme jakkoliv, vždy si můžeme pohlídat, aby bylo menší než 1. Pak z  $|x - 2| < 1$  máme  $1 \leq x \leq 3$  neboli  $x - 1 \leq 2$  a  $x + 1 \geq 2$ . Proto  $\left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \leq \frac{2}{2} = 1$ , tudíž pro  $x$  splňující

$$|x - 2| < 1 \text{ máme } \left| \frac{x^2 + 5}{x + 1} - 3 \right| = \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| |x - 2| \leq |x - 2|.$$

Proto můžeme zvolit  $\delta = \min(\varepsilon, 1)$ . Pak platí (viz předchozí úpravy) kýžená implikace  $|x - 2| < \delta \implies \left| \frac{x^2 + 5}{x + 1} - 3 \right| < \varepsilon$ , důkaz hotov.

**94.** Přepis definice pro nevlastní limitu v nevlastním bodě:

Pro libovolné  $K \in \mathbb{R}$  existuje  $L$  takové, že když  $x$  je libovolné číslo splňující  $x > L$ , tak  $f(x) > K$ .

Je nám **dáno libovolné**  $K$ . Potřebujeme najít  $L$  tak, abychom z nerovnosti  $x > L$  dostali také  $3x + 1 > K$ .

$$\text{Teď: } 3x + 1 > K \iff 3x > K - 1 \iff x > \frac{1}{3}(K - 1).$$

Toto máme splnit pomocí nerovnice  $x > L$ , což se podaří, pokud **zvolíme**  $L = \frac{1}{3}(K - 1)$ . Pak platí (viz předchozí úpravy) kýžená implikace  $x > L \implies (3x + 1) > K$ , důkaz hotov.

**95.** Musíme ukázat, že podmínka z definice není splněna, neboli že platí její negace:

Je nějaké  $\varepsilon > 0$  takové, že ať si zvolíme jakékoli  $\delta > 0$ , tak se vždycky najde  $x \in P_\delta(1)$ , po které **nefunguje**  $|f(x) - 4| < \varepsilon$ .

Jak takové  $\varepsilon$  najdeme? Chceme, aby pro nějaká  $x$  blízka k 1 platilo  $|f(x) - 4| \geq \varepsilon$ . Co víme? Když je  $x$  blízko 1, tak je  $f(x)$  skoro 5, čili se od té 4 liší skoro o jedničku, blíž se nedostaneme, řekněme že je určitě dál než půl. Intuitivně se to zdá jasné, trochu těžší asi pro začátečníka je to udělat algebraicky.

Zkusíme tedy vzít  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  a ukážeme, že pro něj definice limity nefunguje.

Když někdo zkusí nějaké  $\delta > 0$ , tak my vezmeme libovolné  $x_0 \neq 1$  tak, aby splňovalo  $|x_0 - 1| < \delta$  a zároveň  $|x_0 - 1| < \frac{1}{12}$ . O kolik se pak  $f(x_0)$  liší od 4? Nemělo by se příliš lišit od pětky, takže to použijeme jako referenční hodnotu. Z trojúhelníkové nerovnosti  $|x + y| \leq |x| + |y|$  dostaneme volbou  $x = \alpha$ ,  $y = \beta - \alpha$  další užitečnou nerovnost  $|\beta - \alpha| \geq |\beta| - |\alpha|$ , kterou teď použijeme:

$$|f(x_0) - 4| = |(f(x_0) - 5) - (5 - 4)| = |(5 - 4) - (f(x_0) - 5)| \geq |5 - 4| - |(3x_0 + 2) - 5| = 1 - 3|x_0 - 1| \geq 1 - \frac{3}{12} = \frac{3}{4}.$$

Nemůže tedy platit  $|f(x_0) - 4| < \frac{1}{2} = \varepsilon$ .

**96.** Necht  $f$  a  $g$  jsou libovolné liché funkce. Jak reaguje funkce  $\frac{f}{g}$  na dosazení  $-x$ ? Necht  $x$  je libovolné číslo z  $D(f) \cap \{x \in D(g); g(x) \neq 0\}$ .

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \left\langle\left\langle f, g \text{ liché} \right\rangle\right\rangle = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x).$$

Právě jsme dokázali, že tento podíl je sudý a tvrzení tedy platí.

**97.** Necht  $f$  je libovolná lichá a  $g$  libovolná sudá funkce. Jak reaguje funkce  $f + g$  na dosazení  $-x$ ? Necht  $x$  je libovolné číslo z  $M = D(f) \cap D(g)$ .

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = \left\langle\left\langle f \text{ lichá}, g \text{ sudá} \right\rangle\right\rangle = -f(x) + g(x).$$

Aby byla funkce  $f + g$  sudá, pak by tedy muselo pro všechna  $x \in M$  platit  $-f(x) + g(x) = f(x) + g(x)$  neboli  $-f(x) = f(x)$ , což znamená  $f(x) = 0$ . To se stát může, čili zkoumané tvrzení neplatí. Může se stát, že součet liché a sudé funkce je sudý (jmenovitě když ta lichá je nulová funkce).

Podobně ukážeme, že součet liché a sudé je lichý, pokud ta sudá je nulová.

Důkaz zároveň ukazuje, že pokud  $f$  ani  $g$  nejsou identicky nulové na  $M$ , pak už jejich součet symetrický být nemůže. Proč? Jestliže  $f$  není identicky nula na  $M$ , pak  $\exists x_0 \in D(f) \cap D(g)$  takové, že  $f(x_0) \neq 0$ , pak také (viz výše)  $-f(x_0) + g(x_0) \neq f(x_0) + g(x_0)$  a sudost  $f + g$  je porušena.

Jestliže  $g$  není identicky nula na  $M$ , pak  $\exists x_0 \in D(f) \cap D(g)$  takové, že  $g(x_0) \neq 0$ , pak také  $g(x_0) \neq -g(x_0)$ , tedy  $-f(x_0) + g(x_0) \neq -f(x_0) - g(x_0)$  neboli  $(f + g)(-x_0) \neq -[f(x_0) + g(x_0)] = -(f + g)(x_0)$ , což porušuje lichost  $f + g$ .

**98.** Necht  $I$  je interval a  $f, g$  libovolné dvě funkce nerostoucí na  $I$ . Chceme dokázat, že  $f + g$  je nerostoucí, tedy musíme dokázat, že pro libovolná  $x, y \in I$  splňující  $x < y$  máme  $(f + g)(x) \geq (f + g)(y)$ .

Takže necht jsou  $x < y$  libovolná čísla z  $I$ . Podle předpokladu pak platí  $f(x) \geq f(y)$  a  $g(x) \geq g(y)$ . Když tyto dvě nerovnice sečteme, dostaneme  $(f + g)(x) \geq (f + g)(y)$ , přesně jak jsme potřebovali.

**99.** Necht  $I$  je interval a  $f, g$  libovolné dvě funkce rostoucí na  $I$ . Chceme dokázat, že  $f \cdot g$  je rostoucí, tedy musíme dokázat, že pro libovolná  $x, y \in I$  splňující  $x < y$  máme  $(fg)(x) < (fg)(y)$ .

Takže necht jsou  $x < y$  libovolná čísla z  $I$ . Podle předpokladu pak platí  $f(x) < f(y)$  a  $g(x) < g(y)$ . Bohužel nerovnice nejde násobit, pokud nevíme něco o znaménkách. Kdyby byly  $f$  a  $g$  vždy kladné, pak bychom nerovnice násobit mohli, například pomocí tohoto dvojkroku, který je lépe vidět (měníme vždy jen jednu věc, nerovnice lze násobit kladným číslem):  $f(x)g(x) < f(y)g(x) < f(y)g(y)$ .

Kdybychom ale v některém kroku násobili číslem záporným, pak je třeba směr nerovnosti změnit a postup se zadrhne.

To ukazuje dvě věci. Dokázali jsme toto tvrzení: Jestliže jsou  $f$  a  $g$  kladné rostoucí funkce na  $I$ , pak je  $fg$  rostoucí na  $I$ .

Zároveň to vypadá, že pro jiné funkce tam mohou být problémy. Trocha experimentování ukáže, že zkoumané tvrzení opravdu obecně neplatí. Tuto odpověď dokážeme najitím konkrétního protipříkladu, například funkce  $f(x) = x^2$  je rostoucí na  $I = (0, \infty)$ , funkce  $g(x) = -\frac{1}{x}$  je také rostoucí na  $I$ , ale  $(fg)(x) = -x$  je na  $I$  klesající.