MA1: Cvičné příklady—funkce: derivace

Poznámka: Většina typů problémů (intervaly monotonie a lokální extrémy, intervaly konkávity) se také dá procvičovat na příkladech na průběh funkce.

Najděte derivace následujících funkcí:

1. $f(x)=\dfrac{\ln(x)e^{2x}}{\sin(\sqrt{x}\,)+3}$;

2. $f(x)=\ln\Big(\dfrac{(x+1)\,e^{2x}}{\sqrt{x}}\Big)$;

3. $f(x)=\ln(6-3x)+\ln(2x-8)$;

4. $f(x)=\Big(\dfrac{\sin(\sqrt[3]{x}\,)}{e^{1-2x}\ln(x^2+1)}\Big)^{13}$;

5. $f(x)=13^x\sqrt{(\cos(x)+3)\sinh(x)}$;

6. $f(x)=5(x^3+1)^{\operatorname{arctg}(3x)}+13x$;

7. $f(x)=\sqrt[x]{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

8. $f(x)=\dfrac{2^{-x}}{\arcsin(2x-\sqrt{x}\,)}$;

9. $f(x)=\sqrt[\cos(x)]{2-\sin(x)}$;

10. $f(x)=e^{x^2-|x-1|}$;

11. $f(x)=\ln\Big(\dfrac{|1-x|}{x+1}\Big)$;

12. $f(x)=x^3-|x|^3+3x^2-12x$;

13. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+1}, & x<0;\\ 1, & x=0;\\ x^2+1, & x>0;\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases}2\operatorname{arctg}(\frac{1}{x}), & x<0;\\ -\pi, & x=0;\\ x-\pi, & x\in(0,1\rangle;\\ \ln(x-1), & x>1.\end{cases}$

15. Najděte $\Big[\dfrac{x-3}{2x+1}\Big]'''$.

16. Najděte f',f'',f''' pro $f(x)=|x^4-2x^3|$.

17. Najděte derivaci funkce $f(x)=\big(\sin(bx)+1\big)^a$, kde $a,b\in I\!R$ jsou parametry.

Najděte rovnici tečny a normály v daném bodě k dané funkci:

18. $f(x)=3\Big(\dfrac{2x^2}{x^2+1}\Big)^x$, $a=1$;

19. $f(x)=(x-1)^3+2$, $a=1$;

20. $f(x)=(x-1)^3+2$, $a=0$;

21. $f(x)=\sqrt[3]{3x-6}+1$, $a=2$.

22. Najděte tečnu k funkci $f(x)=\ln(x)$ v bodě $A>0$.

Najděte tečny k daným funkcím, které splňují zadanou podmínku:

23. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, tečna rovnoběžná s přímkou $y=-2x$.

24. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, tečna kolmá na přímku $y=-2x$.

25. $f(x)=x^2+3$, tečna procházející bodem $(1,0)$.

26. $f(x)=\dfrac{3}{x^3}$, tečna vytvoří s osami x a y trojúhelník o obsahu 2.

K dané funkci najděte zadaný Taylorův polynom:

27. $f(x)=\sin(2x)$, T_5, $a=\pi$;

28. $f(x)=\ln(x-1)e^{x-2}$, T_2, $a=2$;

29. $f(x)=e^{2x}$, T_4, $a=0$;

30. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, T_4, $a=1$.

Pro poslední dva uhodněte T_n.

Odhadněte dané hodnoty daných funkcí pomocí T_2 s vhodně zvoleným středem:

31. $f(x)=x\,e^{2x+1}$, $f(1.2)=?$

32. $f(x)=\mathrm{tg}(2x)$, $f(3.1)=?$

33. Použijte vhodné T_2 k odhadu $\sqrt{8}$.

Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy daných funkcí:

34. $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$;

35. $f(x)=x^2e^{\frac{1}{2}x}$;

36. $f(x)=\sqrt{x^4+2x^2}$;

37. $f(x)=\dfrac{x^3}{x-4}$;

38. $f(x)=\sqrt[5]{x^3-3x^2}$;

39. $f(x)=\mathrm{arctg}(x^3-12x)$;

40. $f(x)=x^3-|x|^3+3x^2-12x$;

41. $f(x)=(|x-1|-2)e^x$;

42. $f(x)=\mathrm{arctg}(|x^2-6x|)$;

43. $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$;

44. $f(x)=\begin{cases} x\,e^{-x}, & x\geq 0;\\ x^2+2x+1, & x<0.\end{cases}$

45. Určete maximální intervaly motononie a lokální extrémy funkce s parametrem $f(x)=x^2-2a|x|+13$.

Najděte globální extrémy zadané funkce na dané množině:

46. $f(x)=\dfrac{x^3}{x-4}$, $I=\langle 5,7\rangle$;

47. $f(x)=x^2-2|x+2|+3$, $I=\langle 0,3\rangle$;

48. $f(x)=1+x\cdot|x-4|$, a) $I=\langle 1,5\rangle$ b) $I=\langle 1,5)$ c) $I=(1,5\rangle$;

49. $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2}$, $I=\langle 1,\infty)$;

50. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $I=\langle -1,\infty)$.

51. Uvažujme přímky, které vedou skrz bod $(1,4)$ a mají zápornou směrnici. Tyto přímky protnou osy x i y v jejich kladné části, čímž vznikají trojúhelníky. Který takto vzniklý trojúhelník má nejmenší obsah?

52. Najděte válec o největším objemu vepsaný do koule o poloměru R.

53. Plechovka na pivo má mít objem 250 ml a tvar válce. Jaké rozměry minimalizují spotřebu materiálu, tj. povrch?

Určete intervaly konvexity/konkávity a inflexní body daných funkcí:

54. $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$;

55. $f(x)=x^3-|x|^3+3x^2-12x$.

Určete průběh daných funkcí:

56. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$;

57. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$;

58. $f(x)=\ln\big(e^{3x}+1\big)$;

59. $|x|(x^2-3)$;

60. $f(x)=\dfrac{1}{1-\cos(x)}$;

61. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$;

62. $f(x)=\begin{cases} 9x+3x^2-x^3, & x>1; \\ x^2e^x, & x\le 1; \end{cases}$

63. $f(x)=x\ln^2(x)$;

64. $f(x)=\operatorname{arctg}\Big(\dfrac{|x-1|}{x}\Big)$;

65. $f(x)=x^3-6x^2+3x-3|x-2|(x-2)$;

66. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$;

67. $f(x)=\ln\Big(\dfrac{|x-1|}{x+1}\Big)$;

68. $f(x)=x\,e^{2/x}$;

69. $f(x)=\sqrt{x\ln(x)}$;

70. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$;

71. $f(x)=x\,e^{-|x|}$;

72. $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$;

73. $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$;

74. $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x}$;

75. $f(x)=|x-2|(1+|x+1|)$;

76. $f(x)=\arcsin\Big(\dfrac{2x}{x^2+1}\Big)$.

Bonus.

Spočítejte následující derivace podle definice:

77. $f'(2)$ pro $f(x)=x^2+1$;

78. $f'(-1)$ pro $f(x)=x\,e^x$.

Najděte hodnoty parametrů, pro které jsou následující funkce diferencovatelné:

79. $f(x)=\begin{cases} a\,e^{bx}, & x\le 0; \\ \sin(2x)+1, & x>0; \end{cases}$

80. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & x\in\langle 0,1\rangle; \\ ax+bx^{-1}, & x>1. \end{cases}$

81. Ukažte, že funkce $f(x)=2x^3+6x+1$ má inverzní funkci $f_{-1}(y)$ na $\mathbb{R}$.
Najděte pro ni $[f_{-1}]'(9)$.