

MA1: Cvičné příklady—funkce: integrály

Pro nácvik substituce a základních triků:

1. $\int (x-2)(x^2 + \sqrt{x}) dx$;
2. $\int_1^4 \frac{y^2 - \sqrt{y}}{y} dy$;
3. $\int e^{5x} dx$;
4. $\int \sin(\pi s) ds$;
5. $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx$;
6. $\int \frac{1}{x+1} dx$;
7. $\int \frac{dx}{(2x+1)^2}$;
8. $\int (1-t)^3 dt$;
9. $\int \frac{dt}{(1-t)^3}$;
10. $\int \frac{dx}{4-2x}$;
11. $\int_0^6 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}x+1}}$;
12. $\int_{-1}^1 e^{2z+2} dz$;
13. $\int \frac{x dx}{(x^2+3)^2+1}$;
14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$;
15. $\int e^x \cos(e^x+1) dx$;
16. $\int \sin^3(\omega) \cos(\omega) d\omega$;
17. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$;
18. $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2(x))}$;
19. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^7(\alpha) \frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)}$;
20. $\int \frac{3x^2 + \cos(x)}{(x^3 + \sin(x))^2 + 1} dx$;
21. $\int_0^{\pi} 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

Nácvik základních metod:

22. $\int (2x-3) \ln(x) dx$;
23. $\int (x+2) \cos(2x+1) dx$;
24. $\int (x+1)e^{x/3} dx$;
25. $\int_{-1}^0 \arcsin(x) dx$;
26. $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$;
27. $\int \frac{2 dx}{x^2-1}$;
28. $\int \frac{4x+5}{x^2+1} dx$;
29. $\int \frac{3x+6}{(x-1)(2x-1)} dx$;
30. $\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)} dx$;
31. $\int \frac{dx}{4-x^2}$;
32. $\int \frac{2x+3}{x^2+4} dx$;
33. $\int \frac{2x+3}{x^2+6} dx$;
34. $\int \frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)} dx$;
35. $\int \frac{x+3}{x^2+6x+10} dx$;
36. $\int \frac{2x^3-3x^2+1}{x^2+16} dx$;
37. $\int \frac{1}{1+x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;
38. $\int \frac{\sin^4(x) + 5 \sin(x)}{\sin^3(x)} \cos(x) dx$;
39. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;
40. $\int \frac{\ln^2(x)+1}{\ln(x)} \frac{dx}{x}$;
41. $\int \frac{8x-4}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} dx$.

Standardní integrály:

42. $\int (4x+1)e^{2x} dx$;
43. $\int \frac{x^2-4x-5}{x^3-2x^2-3x} dx$;
44. $\int \frac{5 \ln(x)}{(\ln(x)+1)(2 \ln(x)-1)} \frac{dx}{x}$;

- 45.** $\int_1^2 x(2x^2 - 5) \sin(\pi x^2) dx$; **46.** $\int \frac{3e^{2x} + 4e^x - 5}{(e^x + 1)(e^{2x} + 5)} e^x dx$; **47.** $\int \sin^2(x) \cos^3(x) dx$;
48. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} e^x dx$; **49.** $\int \frac{2x + 2}{x^2 + 6x + 13} dx$; **50.** $\int \frac{2 \sin(x) \cos(x) + 4 \cos(x)}{(\sin(x) - 2)(\sin^2(x) + 4)} dx$;
51. $\int e^{2x} \cos(e^x + 1) dx$; **52.** $\int_2^5 \frac{5 dx}{x(\sqrt{x-1} + 2)}$; **53.** $\int \frac{\ln^2(x) + 8 \ln(x)}{(\ln(x) - 2)(\ln^2(x) + 16)} \frac{dx}{x}$;
54. $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$; **55.** $\int \frac{x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 2x - 5}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$; **56.** $\int_0^2 (x - |x - 1|) e^x dx$;
57. $\int \frac{2 \sin(x)}{\cos^2(x)(\cos(x) + 2)} dx$; **58.** $\int \frac{\sin(x) dx}{9 + \cos^2(x)}$; **59.** $\int \ln^2(2x) dx$;
60. $\int \frac{dx}{4 + e^{2x}}$; **61.** $\int \frac{\frac{1}{x} + e^x}{\ln(x) + e^x} dx$; **62.** $\int_0^{\pi/2} (x^2 - 6x) \cos(x) dx$;
63. $\int_0^{\pi} \sin^3(x) dx$; **64.** $\int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 7} dx$; **65.** $\int \operatorname{arctg}(2x)$;
66. $\int \frac{dx}{x - 2\sqrt{x-1}}$; **67.** $\int \frac{\sin(2x) - 3 \sin(x)}{\sin^2(x) + 3 \cos(x) + 3} dx$; **68.** $\int \frac{\ln^2(x) + 3 \ln(x)}{(\ln(x) + 1)^2(\ln(x) - 1)} \frac{dx}{x}$;
69. $\int e^x(2e^x - 1) \sin(\pi e^x) dx$; **70.** $\int \frac{\sin(x) dx}{4 \sin^2(x) + 6 \cos^2(x)}$; **71.** $\int_0^1 x^2 e^{x/2} dx$;
72. $\int \frac{dx}{(4 + e^{2x})e^x}$; **73.** $\int \frac{e^x - 4}{e^{2x} + e^x - 2} dx$; **74.** $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + 2 \sin(x) + 2} dx$;
75. $\int 2 \operatorname{arctg}(x + 1) dx$; **76.** $\int \frac{3x^2 + 13}{x^3 + 13x} + \frac{2}{x^3 - x} dx$; **77.** $\int \frac{\sin(2x)}{(2 \sin(x) + 3)(5 - \cos^2(x))} dx$;
78. $\int \frac{dx}{2e^{2x} + e^x - 1}$; **79.** $\int \frac{\cos(x) \sin^2(x) - \sin(2x) - 2 \cos(x)}{\sin^2(x) - 2} dx$;
80. $\int_4^9 \frac{dx}{x^2 + x - |x - 6| + 3}$; **81.** $\int_6^{11} \frac{x + 1}{x - 2\sqrt{x-2} - 1} dx$; **82.** $\int \frac{2 dx}{\sin(x)(\cos(x) + 2)}$;
83. $\int \frac{9x + 5}{3x^2 + 4x + 2} dx$; **84.** $\int \frac{2x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 7x^2 + 2x - 5}{x^4 - 2x^3 + 5x^2} dx$;
85. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}$; **86.** $\int \frac{25 \sin(2x)}{(\cos(x) + 1)^2(\cos^2(x) + 4)} dx$;
87. (bonus) $\int f(x) dx$, kde $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+4}, & x \leq 0; \\ \frac{x}{e^x}, & x > 0. \end{cases}$

Vypočítejte následující integrály s parametrem:

$$88. \int 2x e^{ax^2} dx; \quad 89. \int x^a \ln(x) dx; \quad 90. \int \frac{\cos(\ln(ax))}{x} dx, a \neq 0.$$

Spočítejte (pokud konverguje)

$$91. \int_1^{\infty} (4x - 3)e^{3x-2x^2} dx; \quad 92. \int_0^4 \frac{1}{1+x} \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad 93. \int_0^4 \frac{x+13}{x^2+x-6} dx;$$

$$94. \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}-1}; \quad 95. \int_4^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-4}}; \quad 96. \int_{-1}^1 \frac{x-2}{x^3+2x^2} dx.$$

97. Spočítejte (pokud konverguje) integrál s parametrem $\int_1^{\infty} \frac{2ax^2 - 2x^2 - 2}{x(x^2 + 1)} dx$.

98. Určete, pro které hodnoty parametru konverguje integrál $\int_0^{\infty} x e^{ax} dx$.

Rozhodněte, zda konverguje integrál

$$99. \int_2^{\infty} \frac{x+1}{x^2-x-1} dx; \quad 100. \int_1^{\infty} \frac{x+17}{13x^3-\ln(x)} dx; \quad 101. \int_2^{\infty} \frac{x+\pi}{(x-1)(\sqrt{x-1}+1)} dx.$$

Najděte derivaci následujících funkcí:

$$102. F(x) = \int_{13}^{e^x} \sin(t^2) dt; \quad 103. F(x) = \int_{\cos(x)}^{x^2} e^t \sqrt{t^2+1} dt.$$

104. Najděte obsah oblasti pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$.

105. Najděte obsah oblasti pod grafem funkce $y = \arcsin(x)$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$

106. Najděte obsah konečné oblasti vymezené grafy $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ a $g(x) = x + 1$.

107. Najděte obsah konečné oblasti vymezené křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ a $y = x - 2$.

108. Uvažujte konečnou oblast R vymezenou křivkami $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ a $x = 1$.

a) Najděte objem tělesa získaného rotací oblasti R okolo osy x .

b) Najděte objem tělesa získaného rotací oblasti R okolo osy y .

c) Najděte objem tělesa získaného rotací oblasti R okolo přímky $y = -1$.

109. Uvažujte konečnou oblast R vymezenou křivkami $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $y = 0$ a $x = 2$.

a) Najděte objem tělesa získaného rotací oblasti R okolo osy x .

b) Najděte objem tělesa získaného rotací oblasti R okolo osy y .

c) Najděte objem tělesa získaného rotací oblasti R okolo přímky $x = -1$. (těžké)

110. Najděte délku křivky dané $f(x) = x^2$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$. (těžké)