MA1: Cvičné příklady—posloupnosti, řady, mocninné řady
Stručná řešení

1. První členy: $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{3}{5}$, $a_5 = \frac{2}{3}$. Podezření: $\{a_n\}$ je rostoucí. Podíváme se na to:
$a_{n+1} > a_n \iff \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} > \frac{n-1}{n+1} \iff n(n+1) > (n-1)(n+2) \iff n^2+n > n^2+n-1 \iff 0 > -1.$
Dostali jsme nerovnost platnou pro všechna n, nám stačí pro, proto pro $n \geq 1$ platí i $a_{n+1} > a_n$. Dokázali jsme, že $\{a_n\}$ je rostoucí.

2. První členy: $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{8}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{1}{32}$. Podezření: $\{a_n\}$ je rostoucí. Podíváme se na to:
$a_{n+1} > a_n \iff \frac{(n+1)-4}{2^{n+1}} > \frac{n-4}{2^n} \iff n-3 > 2(n-4) \iff 5 > n.$
Vidíme, že $a_{n+1} > a_n$ jen pro $n < 5$, pro $n > 5$ naopak $a_{n+1} < a_n$. Proto posloupnost nejprve roste, ale od $k = 5$ klesá. (Namátkou, $a_8 = \frac{4}{2^8} = \frac{8}{2^9}$, $a_9 = \frac{5}{2^p}$, opravdu $a_9 < a_8$, asi jsme to spočítali dobře.) Posloupnost proto není monotonní.

3. První členy: $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{8}$, $a_5 = \frac{1}{40}$. Podezření: $\{a_n\}$ je klesající. Podíváme se na to:
$a_{n+1} < a_n \iff \frac{3}{(n+1)!} < \frac{3}{n!} \iff n! < (n+1)! \iff 1 < n+1.$
Dostali jsme nerovnost platnou pro $n \geq 1$, proto platí i $a_{n+1} < a_n$. Dokázali jsme, že $\{a_n\}$ je klesající.

4. První členy: $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = \frac{4}{3}$, $a_4 = \frac{2}{3}$, $a_5 = \frac{4}{15}$. Máme $a_1 = a_2$, tedy nebude ryzí monotonie. Podezření: $\{a_n\}$ je nerostoucí. Podíváme se na to:
$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{2^n}{n!} \iff 2n! \leq (n+1)! \iff 2 \leq n+1 \iff 1 \leq n.$
Dostali jsme nerovnost platnou pro $n \geq 1$, proto platí i $a_{n+1} \leq a_n$. Dokázali jsme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí.

5. První členy: $a_1 = -1$, $a_2 = -\frac{1}{9}$, $a_3 = \frac{1}{27}$, $a_4 = \frac{1}{27} = \frac{9}{3^5}$, $a_5 = \frac{5}{3^5}$. Máme $a_1 < a_2$, ale také $a_4 > a_5$. Posloupnost proto není monotonní.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\sqrt{1+\sin\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)}\Big) = \sqrt{1+\sin\Big(\lim\limits_{n\to\infty}\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)\Big)} \overset{\frac{1}{\infty}=0}{=\!=\!=} \sqrt{1+\sin(0)} = 1.$

7.
$$\lim_{n\to\infty}\Big[\Big(\frac{1-4n^2+3n}{3+n+2n^2}\Big)^3 + \frac{1+e^{-n}}{n^2+\frac{1}{n}}\Big] = \Big(\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{\cancel{n^2}(\frac{1}{n^2}-4+\frac{3}{n})}{\cancel{n^2}(\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n}+2)}\Big]\Big)^3 + \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1+\frac{1}{e^n}}{n^2+\frac{1}{n}}\Big)$$
$$= \Big\langle\!\Big\langle \Big(\frac{\frac{1}{\infty}-4+\frac{3}{\infty}}{\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}+2}\Big)^3 + \frac{1+\frac{1}{e^\infty}}{\infty+\frac{1}{\infty}} = \Big(\frac{0-4+0}{0+0+2}\Big)^3 + \frac{1+\frac{1}{\infty}}{\infty+0} = (-2)^3 + \frac{1}{\infty}\Big\rangle\!\Big\rangle = (-2)^3 + 0 = -8.$$
V prvním výrazu šlo místo vytýkání přímo zkrátit n^2 ve zlomku.
Při výpočtu prvního zlomku uvnitř je také možné přejít k funkcím a použít obecnou verzi l'Hospitalova pravidla:
$$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{1-4x^2+3x}{3+x+2x^2}\Big) \overset{\frac{?}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{-8x+3}{1+4x}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{-8}{4}\Big) = -2.$$

8. Po dosazení nekonečna dostáváme neurčitý podíl, nejlepší tedy bude přejít k limitě funkce.
$$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}+1}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2\sqrt{x}}{x}\Big) = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2}{\sqrt{x}}\Big) \overset{\frac{2}{\infty}}{=\!=} 0.$$
Poznámka: Tento výsledek je "jasný", protože podle škály mocnin v nekonečnu libovolná mocnina přebije logaritmus.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\big(e^{13\sqrt{n}-n}\big) = \lim\limits_{n\to\infty}\big(e^{n(13/\sqrt{n}-1)}\big) \overset{e^{\infty(0-1)}=e^{-\infty}}{=\!=\!=\!=} 0.$

10.
$$\lim_{n\to\infty}\big(\operatorname{arctg}(3^n-2^n)\big) = \operatorname{arctg}\Big(\lim_{n\to\infty}\big(3^n\big(1-\tfrac{2^n}{3^n}\big)\big)\Big) = \operatorname{arctg}\Big(\lim_{n\to\infty}\big(3^n\big(1-\big(\tfrac{2}{3}\big)^n\big)\big)\Big)$$
$$= \Big\langle\!\Big\langle \big|\tfrac{2}{3}\big| < 1 \implies \infty(1-0)\Big\rangle\!\Big\rangle \overset{\operatorname{arctg}(\infty)}{=\!=\!=} \tfrac{\pi}{2}.$$

11.
$$\lim_{n\to\infty}\Big[\cos\Big(\frac{2^{2n+1}+(-2)^n}{(-5)^n+2^{2n-1}}\Big)\Big] = \cos\Big(\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{2\cdot 4^n+(-2)^n}{(-5)^n+\frac{1}{2}\cdot 4^n}\Big]\Big) = \cos\Big(\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{4^n}{(-5)^n}\,\frac{2+\frac{(-2)^n}{4^n}}{1+\frac{1}{2}\frac{4^n}{(-5)^n}}\Big]\Big)$$

$$= \cos\Big(\lim_{n\to\infty}\Big[\big(-\tfrac{4}{5}\big)^n \frac{2+\big(-\frac{1}{2}\big)^n}{1+\frac{1}{2}\big(-\frac{4}{5}\big)^n}\Big]\Big) = \Big\langle\!\!\Big\langle \big|-\tfrac{1}{2}\big|<1 \implies \big(-\tfrac{1}{2}\big)^n \to 0, \quad \big|-\tfrac{4}{5}\big|<1 \implies \big(-\tfrac{4}{5}\big)^n \to 0 \Big\rangle\!\!\Big\rangle$$
$$= \Big\langle\!\!\Big\langle \cos\big(0\cdot\tfrac{2+0}{1+\frac{1}{2}\cdot 0}\big)\Big\rangle\!\!\Big\rangle = \cos(0) = 1.$$

Protože se z $(-2)^n$ nedá udělat funkce (a^x vyžaduje $a>0$), výpočet přes funkce není možný.

12. $$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{2^{3n}-1}{(-7)^n-4^n}\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{8^n-1}{(-7)^n-4^n}\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{8^n}{(-7)^n}\,\frac{1-\frac{1}{8^n}}{1-\frac{4^n}{(-7)^n}}\Big)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\big(-\tfrac{8}{7}\big)^n\Big)\cdot\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1-\frac{1}{8^n}}{1-\big(-\frac{4}{7}\big)^n}\Big) = \Big\langle\!\!\Big\langle \big(-\tfrac{8}{7}\big)^\infty \tfrac{1-0}{1-0}\Big\rangle\!\!\Big\rangle$$

Protože $\big|-\frac{8}{7}\big|>1$, víme, že $\big\{\big(-\frac{8}{7}\big)^n\big\}$ diverguje, a protože vlastně $-\frac{8}{7}<-1$, tak dokonce neexistuje limita, členy posloupnosti střídavě utíkají do plus i mínus nekonečna. Tento člen je násoben něčím, co je pro velká n přibližně rovno 1, čímž se ona rostoucí oscilace nemůže napravit. Závěr:
$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{2^{3n}-1}{(-7)^n-4^n}\Big) \text{ neex.}$$
Protože se z $(-7)^n$ nedá udělat funkce (a^x vyžaduje $a>0$), výpočet přes funkce není možný.

13. $$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{\sqrt{n^3+4n^2}-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n}+1}\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{(\sqrt{n^3+4n^2}-\sqrt{n^3+1})(\sqrt{n^3+4n^2}+\sqrt{n^3+1})}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n^3+4n^2}+\sqrt{n^3+1})}\Big)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{4n^2-1}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n^3+4n^2}+\sqrt{n^3+1})}\Big)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{4n^2-1}{\sqrt{n}(1+\frac{1}{\sqrt{n}})n^{3/2}\Big(\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\Big)}\Big)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{\cancel{n^2}(4-\frac{1}{n^2})}{\cancel{n^2}(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\Big(\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\Big)}\Big) = \Big\langle\!\!\Big\langle \frac{4-0}{(1+0)(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0})}\Big\rangle\!\!\Big\rangle = 2.$$

Je také možné počítat tuto limitu jako limitu funkce pomocí l'Hospitalova pravidla, ale derivace těch odmocnin nezní moc lákavě:
$$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{\sqrt{x^3+4x^2}-\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x}+1}\Big) \underset{\text{l'H}}{\overset{?}{\overset{\infty}{=}}} \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{\frac{3x^2+8x}{2\sqrt{x^3+4x^2}}-\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\Big) = \ldots$$
Další výpočet přenecháme milovníkům adrenalinových sportů

14. $\{n+(-1)^n\}_{n=1}^\infty = \{1-1, 2+1, 3-1, 4+1, 5-1, 6+1, 7-1, \ldots\} = \{0,3,2,5,4,7,6,\ldots\}$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty}\big(n+(-1)^n\big)=\infty$. Formálně se použije srovnání, $n+(-1)^n \ge n-1 \to \infty$.

15. $\{n\cdot(-1)^n\}_{n=1}^\infty = \{-1,2,-3,4,-5,6,-7,\ldots\}$, proto $\lim\limits_{n\to\infty}\big(n\cdot(-1)^n\big)$ neexistuje.
Důkaz například sporem. Kdyby existovala limita L, pak k ní musí konvergovat i každá podposloupnost, třeba podposloupnost z lichých členů $\{-1,-3,-5,-7,-9,\ldots\}$ i podposloupnost ze sudých členů $\{2,4,6,8,10,\ldots\}$, ale tyto dvě posloupnosti nemají stejnou limitu L.

16. $\{\sin(\frac{\pi}{2}n)\}_{n=1}^\infty = \{\sin(\frac{\pi}{2}), \sin(\pi), \sin(\frac{3}{2}\pi), \sin(2\pi), \sin(\frac{5}{2}\pi), \sin(3\pi), \ldots\} = \{1,0,-1,0,1,0,\ldots\}$, proto $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\sin(\frac{\pi}{2}n)\Big)$ neexistuje.
Důkaz například sporem. Kdyby existovala limita L, pak k ní musí konvergovat i každá podposloupnost, například podposloupnost $\{1,1,1,1,1,\ldots\}$ i podposloupnost ze sudých členů $\{0,0,0,0,0,\ldots\}$, ale tyto dvě posloupnosti nemají stejnou limitu L, každá má jinou.

17. $\{\frac{1}{n}\sin(\frac{\pi}{2}n)\}_{n=1}^\infty = \{\sin(\frac{\pi}{2}), \frac{1}{2}\sin(\pi), \frac{1}{3}\sin(\frac{3}{2}\pi), \frac{1}{4}\sin(2\pi), \frac{1}{5}\sin(\frac{5}{2}\pi), \frac{1}{6}\sin(3\pi), \ldots\}$
$= \{1,0,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,-\frac{1}{7},0,\ldots\}$, proto $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n}\sin(\frac{\pi}{2}n)\Big) = 0$.
Formálně by se použila věta o sevření, nejlépe verze s absolutní hodnotou:
$$\big|\tfrac{1}{n}\sin(\tfrac{\pi}{2}n)\big| = \tfrac{1}{n}\big|\sin(\tfrac{\pi}{2}n)\big| \le \tfrac{1}{n} \to 0.$$

18. Pokud si pamatujeme speciální pravidlo, je výpočet snadný:

$\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\big(1-\frac{4}{n}\big)^{3n}\Big)=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\big[\big(1+\frac{-4}{n}\big)^n\big]^3\Big)=[e^{-4}]^3=e^{-12}.$
V opačném případě nezbývá než jít na to standardně, tj. dosadit nekonečno, a protože typ 1^∞ je neurčitý, přejít k funkcím a příslušnému postupu.
$\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\big(1-\frac{4}{x}\big)^{3x}\Big)=\lim\limits_{x\to\infty}\Big(e^{3x\ln\left(1-\frac{4}{x}\right)}\Big)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x\ln(1-\frac{4}{x}))}.$
Teď spočítáme limitu v exponenciále, po dosazení nekonečna má typ $0\cdot\infty$ a musí se převést na podíl.
$$\lim_{x\to\infty}\Big(3x\ln\big(1-\tfrac{4}{x}\big)\Big)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(1-\frac{4}{x})}{\frac{1}{3x}}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=}}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{1-\frac{4}{x}}\cdot\frac{4}{x^2}}{\frac{-1}{3x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-12}{1-\frac{4}{x}}\right)=-12.$$
Návrat k exponenciále: $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\big(1-\frac{4}{x}\big)^{3x}\Big)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x\ln(1-\frac{4}{x}))}=e^{-12}.$

19. Toto se zase standardně řeší dosazením nekonečna, výsledný typ 1^∞ je neurčitý a standardní postup je přesun k funkcím, převod na exponenciálu a někde tam bude l'Hospital.
$\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\big((\frac{x-1}{x+1}\big)^{2x-1}\Big)=\lim\limits_{x\to\infty}\Big(e^{(2x-1)\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}\Big)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left((2x-1)\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)}.$
Teď zase ignorujeme e, limita v něm je neurčitý součin $\infty\cdot 0$, tedy převod na podíl.
$$\lim_{x\to\infty}\Big((2x-1)\ln\big(\tfrac{x-1}{x+1}\big)\Big)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{(2x-1)^{-1}}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=}}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left[\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]'}{[(2x-1)^{-1}]'}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}\,\frac{2}{(x+1)^2}}{-2(2x-1)^{-2}}\right)=-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\right)=-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-4x+1}{x^2-1}\right)$$
$$=-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}\right)=\left\langle\!\!\left\langle\frac{4-\frac{4}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{1-\frac{1}{\infty^2}}=\frac{4-0+0}{1-0}\right\rangle\!\!\right\rangle=-4.$$
Nakonec dosadit zpět do exponenciály:
$\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\big(\frac{x-1}{x+1}\big)^{2x-1}\Big)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left((2x-1)\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)}=e^{-4}.$
Alternativa: Existuje způsob, jak zadaný vzoreček převést na tvar zvládnutelný přes typ e^c.
$\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\big(\frac{n-1}{n+1}\big)^{2n-1}\Big)=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\big(1-\frac{2}{n+1}\big)^{2n-1}\Big)$
Toto vypadá dost podobně, ale ne zcela. První krok je zbavit se kompliace ve jmenovateli substitucí.
$$\lim_{n\to\infty}\Big(\big(1-\tfrac{2}{n+1}\big)^{2n-1}\Big)=\left|\begin{array}{c} m=n+1\\ n=m-1\\ 2n-1=2(m-1)-1=2m-3\\ n\to\infty\implies m\to\infty\end{array}\right|=\lim_{m\to\infty}\Big(\big(1-\tfrac{2}{m}\big)^{2m-3}\Big)$$
Teď zjednodušíme mocninu a bude to.
$\lim\limits_{m\to\infty}\Big(\big(1-\frac{2}{m}\big)^{2m-3}\Big)=\lim\limits_{m\to\infty}\Big[\big(1-\frac{2}{m}\big)^{2m}\cdot\big(1-\frac{2}{m}\big)^{-3}\Big]=\Big[\lim\limits_{m\to\infty}\big(1+\frac{-2}{m}\big)^m\Big]^2\cdot\Big[\lim\limits_{m\to\infty}\big(1-\frac{2}{m}\big)\Big]^{-3}=\big[e^{-2}\big]^2\cdot(1-0)^{-3}=e^{-4}.$

20. Chce se po nás následující: Je-li dáno libovolné $\varepsilon>0$, musíme najít N takové, aby pro $n\geq N$ platilo $\big|\frac{3n-1}{n+1}-3\big|<\varepsilon$.
Předpokládejme tedy, že je nějaké $\varepsilon>0$ dáno, a zkusme zjednodušit nerovnost, kterou máme zajistit:
$\big|\frac{3n-1}{n+1}-3\big|<\varepsilon\iff\big|\frac{-4}{n+1}\big|<\varepsilon\iff\frac{4}{n+1}<\varepsilon\iff\frac{4}{\varepsilon}<n+1\iff\frac{4}{\varepsilon}-1<n.$
Dostali jsme nerovnost, která platí, pokud je n velké, což je přesně tím správným směrem, protože my můžeme velká n zajisiti. Takže: Pro to dané ε si zvolíme nějaké velké číslo N takové, aby $\frac{4}{\varepsilon}-1<N$. Našli jsme správné N? Ano, protože všechna $n\geq N$ také splňují $\frac{4}{\varepsilon}-1<n$, tedy podle našich (ekvivalentních) úprav i $\big|\frac{3n-1}{n+1}-3\big|<\varepsilon$.

21. Chce se po nás následující: Je-li dáno libovolné $K>0$, musíme najít N takové, aby pro $n\geq N$ platilo $n^2+\sin(n)>K$.
To je ale snadné, stačí zvolit kladné N tak velké, aby $N>\sqrt{K+1}$. Všechna $n\geq N$ pak také splňují
$n>\sqrt{K+1}\implies n^2>K+1\implies n^2+\sin(n)\geq n^2-1>(K-1)+1=K.$

22. Stačí dokázat, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3\sqrt{n}\ln(n)}{n^2}\right)=A>0$, nejlépe vydělit a pak l'Hospitala, čili přechod k funkcím.

$\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\frac{x^2-3\sqrt{x}\ln(x)}{x^2}\Big)=\lim\limits_{x\to\infty}\Big(1-3\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x^2}\Big)=1-3\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\frac{\ln(x)}{x^{3/2}}\Big)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}}1-3\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\frac{2}{3x\cdot x^{1/2}}\Big)\overset{\frac{1}{\infty}}{=\!=}1-0=1.$
Pokud je nám povoleno použít škálu mocnin, tak podle ní je limita získaná po vydělení jasně nulová a nemusíme dál počítat.

23. Stačí dokázat, že $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{3^{n+1}-1313n^{13}}{3^n}\Big)=A>0$, nejlépe vydělit a pak l'Hospitala, čili přechod k funkcím.
$\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\frac{3^{x+1}-1313x^{13}}{3^x}\Big)=\lim\limits_{x\to\infty}\Big(3-1313\frac{x^{13}}{3^x}\Big)=3-1313\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\frac{x^{13}}{3^x}\Big)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}}3-1313\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\frac{13x^{12}}{\ln(3)3^x}\Big).$
Dalších dvanáct l'Hospitalů necháme trpělivým. Jedna možnost je prohlásit, že po třinácti lospitalech dostaneme
$\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\frac{3^{x+1}-1313x^{13}}{3^x}\Big)=\ldots=3-1313\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\frac{13!}{[\ln(3)]^{13}3^x}\Big)\overset{\frac{1}{\infty}}{=\!=}3-0=3,$
vzoreček by se dokázal indukcí. Anebo prostě prohlásíme, že $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\frac{x^{13}}{3^x}\Big)=0$, protože podle škály v nekonečnu exponenciály dominují mocninám, a budeme doufat, ž to vezmou jako argument, při představě 13 l'H mi to přijde jako dobrý risk.

24. Stačí dokázat, že $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{n\ln(n)}{n^p}\Big)=0$, nejlépe vydělit a pak l'Hospitala, čili přechod k funkcím.
$\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\frac{x\ln(x)}{x^p}\Big)=\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\frac{\ln(x)}{x^{p-1}}\Big)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}}\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\frac{1}{x\cdot px^{p-2}}\Big)=\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\frac{1}{px^{p-1}}\Big)\overset{\frac{1}{\infty}}{=\!=}0.$
Zde jsme použili, že $p>1$, protože pak $p-1>0$ a tedy $\infty^{p-1}=\infty$. Je to podstatné, protože kdyby bylo $p-1<0$, pak $\infty^{p-1}=0$.

25. Stačí dokázat, že $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{n!+2^n}{n!}\Big)=A>0$, nejlépe vydělíme.
$\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{n!+2^n}{n!}\Big)=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\frac{2^n}{n!}\Big)=1+\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{2^n}{n!}\Big).$
Pokud je nám povoleno použít škálu mocnin, tak můžeme prohlásit, že podle ní je
$\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{n!+2^n}{n!}\Big)=1+\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{2^n}{n!}\Big)=1+0=1.$
Pokud bychom ji neměli k dispozici, tak by se to muselo dokázat, což ale tradičním l'Hospitalem nejde kvůli faktoriálu, dělá se to jinak, což je v každé tlustší knize o limitách, já si myslím, že to po vás nikdo chtít nebude. Nicméně viz o dva příklady dál.

26. Stačí dokázat, že $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{n^37^n}{n!}\Big)=0$, to ale nebude žádná sranda, protože na faktoriál nelze použít l'Hospitala. Nejlepší je předpokládat, že je nám povoleno použít škálu mocnin. Víme, že $7^n\ll n!$ a $n^3\ll n!$, ale součin n^37^n je výrazně větší než jeho jednotlivé části, je tedy potřeba ukázat, že je stejně pořád podstatně menší než faktoriál. Jsou dva rozumné způsoby.
Algebraický:
$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n^37^n}{n!}\Big)=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n^37^n}{(n-3)!(n-2)(n-1)n}\Big)=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n^27^3}{(n-2)(n-1)}\Big)\cdot\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{7^{n-3}}{(n-3)!}\Big)$$
$$=\Big|\ m=n-3\ \Big|=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{7^3}{(1-\frac{2}{n})(1-\frac{1}{n})}\Big)\cdot\lim_{m\to\infty}\Big(\frac{7^m}{m!}\Big)=7^3\cdot 0=0.$$
Zde jsme v posledním kroku použili $7^m\ll m!$.
Trikem: $n^3\ll 2^n$, proto $n^3\cdot 7^n\ll 2^n\cdot 7^n=14^n\ll n!$, takže podle tranzitivity $n^3\cdot 7^n\ll n!$.
Pokud někomu ke štěstí chybí důkaz $a^n\ll n!$, viz níže,

27. Stačí dokázat, že $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{a^n}{n!}\Big)=0$. Nejprve se na to podíváme.
$\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{a^n}{n!}\Big)=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-1)n}\Big)=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{a}{n}\Big)$
Protože $a>0$ je konstanta, určitě existuje přirozené číslo N takové, že $a\le N$. Pro $k\ge N$ pak platí $\frac{a}{k}\le 1$, tedy

$\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{a^n}{n!}\Big)=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{a}{1}\cdot\ldots\frac{a}{N}\cdot\frac{a}{N+1}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{a}{n}\Big)\le\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{a}{1}\cdot\ldots\frac{a}{N}\cdot\frac{a}{n}\Big).$
protože jsou a a N konstanty, je $\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{N}=K$ konstanta, tudíž
$\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{a^n}{n!}\Big)\le K\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{a}{n}\Big)=0.$

28. $=\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{3(-2)(-2)^k}{4^{-1}4^k}=-24\sum\limits_{k=3}^{\infty}\big(\frac{-2}{4}\big)^k=-24\big(-\frac{1}{2}\big)^3\sum\limits_{k=0}^{\infty}\big(-\frac{1}{2}\big)^k=\left\langle\!\!\left\langle\big|-\frac{1}{2}\big|<1\right\rangle\!\!\right\rangle=3\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=2.$

29. Teleskopická, $\sum\limits_{k=5}^{\infty}\big(\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}\big)=\infty$, protože
$s_N=\big(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\big)+\big(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5}\big)+\big(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{6}\big)+\cdots+\big(\sqrt[3]{N-1}-\sqrt[3]{N-2}\big)+\big(\sqrt[3]{N}-\sqrt[3]{N-1}\big)$
$=\sqrt[3]{N}-\sqrt[3]{4}\to\infty.$

30. $=\frac{1}{98}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\big(\frac{7}{4}\big)^k=\left\langle\!\!\left\langle\frac{7}{4}\ge 1\right\rangle\!\!\right\rangle=\infty.$

31. $=\frac{4}{3^3}\sum\limits_{k=5}^{\infty}\big(-\frac{8}{9}\big)^k=\frac{4}{27}\big(-\frac{8}{9}\big)^5\sum\limits_{k=0}^{\infty}\big(-\frac{8}{9}\big)^k=\left\langle\!\!\left\langle\big|\frac{8}{9}\big|<1\right\rangle\!\!\right\rangle=\frac{4}{27}\big(-\frac{8}{9}\big)^5\frac{1}{1+\frac{8}{9}}=\frac{4}{51}\big(-\frac{8}{9}\big)^5.$

32. Teleskopická, $\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=3}^{\infty}\Big(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\Big)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$, protože
$s_N=\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\big)+\big(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\big)+\big(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\big)+\cdots+\big(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N}\big)+\big(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+1}\big)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\to\frac{5}{6}.$

33. Nejde sečíst, není ani geometrická, ani teleskopická, proto zkusíme dokázat, že diverguje. Odmocninové ani podílové kritérium nepomůžou (limitní dají 1), šlo by integrální. Taky by šlo limitní srovnávací kritérium,
$\frac{k}{k^2+1}\sim\frac{1}{k}$, ověříme: $\lim\limits_{k\to\infty}\Bigg(\frac{\frac{k}{k^2+1}}{\frac{1}{k}}\Bigg)=\lim\limits_{k\to\infty}\big(\frac{k^2}{k^2+1}\big)=1>0.$
Proto i $\sum\frac{k}{k^2+1}\sim\sum\frac{1}{k}=\infty$, důkaz divergence hotov.
Srovnávací by nepomohlo, $\frac{k}{k^2+1}\le\frac{1}{k}$, proto $\sum\frac{k}{k^2+1}\le\sum\frac{1}{k}=\infty$, z toho nic neleze.

34. Chyba aproximace bude $E=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^k+1}-\sum\limits_{k=0}^{20}\frac{1}{5^k+1}=\sum\limits_{k=21}^{\infty}\frac{1}{5^k+1}.$
Jak je velká? Jedna možnost je odhadnout chybu shora srovnáním s geometrickou řadou, kterou sečíst umíme:
$E\le\sum\limits_{k=21}^{\infty}\big(\frac{1}{5}\big)^k=\big(\frac{1}{5}\big)^{21}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\big(\frac{1}{5}\big)^k=\big(\frac{1}{5}\big)^{21}\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4\cdot 5^{20}}\sim 2.62\cdot 10^{-15}.$
Nabízí se i odhad z integrálního kritéria, funkce $f(x)=\frac{1}{5^x+1}$ je na $\langle 21,\infty)$ kladná a klesající:
$$\int\limits_{21}^{\infty}\frac{dx}{5^x+1}\le E\le\frac{1}{5^{21}+1}+\int\limits_{21}^{\infty}\frac{dx}{5^x+1}.$$
Co s tím integrálem?
$$\int\frac{dx}{5^x+1}=\left|\begin{array}{l} y=5^x+1\\ dy=\ln(5)5^x\,dx\\ dx=\frac{1}{\ln(5)5^x}\,dy=\frac{dy}{\ln(5)(y-1)}\end{array}\right|=\frac{1}{\ln(5)}\int\frac{dy}{y(y-1)}=\frac{1}{\ln(5)}\int\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\,dy$$
$$=\frac{1}{\ln(5)}\big(\ln|y-1|-\ln|y|\big)+C=\frac{1}{\ln(5)}\ln\Big|\frac{5^x-1}{5^x}\Big|+C,\qquad\text{proto}$$
$$\int\limits_{21}^{\infty}\frac{dx}{5^x+1}=\Big[\frac{1}{\ln(5)}\ln\Big|\frac{5^x-1}{5^x}\Big|\Big]=\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{1}{\ln(5)}\ln\Big|1-\frac{1}{5^x}\Big|\Big)-\frac{1}{\ln(5)}\ln\big|\frac{5^{21}-1}{5^{21}}\big|=\frac{1}{\ln(5)}\ln\big(1+\frac{1}{5^{21}}\big).$$
Takže $\frac{1}{\ln(5)}\ln\big(1+\frac{1}{5^{21}}\big)\le E\le\frac{1}{5^{21}+1}+\frac{1}{\ln(5)}\ln\big(1+\frac{1}{5^{21}}\big)$, přibližně to dává $1.3\cdot 10^{-15}\le E\le 3.4\cdot 10^{-15}$.
Nás zajímá hlavně horní odhad, tedy $E\le 3.4\cdot 10^{-15}$, což je trochu horší odhad než ten získaný srovnáním výše, na druhou stranu ten dolní odhad ukazuje, že ani jeden z horních odhadů příliš nepřestřelil a řád chyby je určitě 10^{-15}.

35. Chyba aproximace bude $E=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}-\sum\limits_{k=0}^{40}\frac{(-1)^k}{k^2+1}=\sum\limits_{k=41}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}$.

Jak je velká? Protože jde o alternující řadu ve tvaru $\sum(-1)^k b_k$, kde $b_k=\frac{1}{k^2+1}$ tvoří kladnou a klesající posloupnost, existuje pěkný odhad: $|E|\le b_{41}=\frac{1}{41^2+1}\sim 0.0006$.

Další možnosti nabízí odhad shora pomocí absolutní hodnoty: $|E|\le\sum\limits_{k=41}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k^2+1}\right|=\sum\limits_{k=41}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}$.

Tady se vyloženě nabízí integrální kritérium pro odhad shora:

$$|E|\le\tfrac{1}{41^2+1}+\int\limits_{k=41}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\tfrac{1}{41^2+1}+\Big[\operatorname{arctg}(x)\Big]_{k=41}=\tfrac{1}{41^2+1}+\lim_{x\to\infty}\big(\operatorname{arctg}(x)\big)-\operatorname{arctg}(41)$$
$$=\tfrac{1}{41^2+1}+\tfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(41)\sim 0.024.$$

Odhad je výrazně horší, což se dalo čekat, protože jsme hend v prvním kroku díky absolutní hodnotě ze všech mínusů udělali plusy a součet tak znatelně zvětšili. U alternujících řad je ten první odhad nejlepší.

36. Chyba aproximace bude $E=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2}{3^k+k}-\sum\limits_{k=0}^{50}\frac{2}{3^k+k}=\sum\limits_{k=51}^{\infty}\frac{2}{3^k+k}$.

Jak je velká? Jedna možnost je odhadnout chybu shora srovnáním s geometrickou řadou, kterou sečíst umíme:

$$E\le\sum_{k=51}^{\infty}\frac{2}{3^k}=2\sum_{k=51}^{\infty}\left(\tfrac13\right)^k=2\left(\tfrac13\right)^{51}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac13\right)^k=2\left(\tfrac13\right)^{51}\frac{1}{1-\frac13}=\frac{1}{3^{50}}\sim 1.39\cdot 10^{-24}.$$

Jsou i jiné možnosti? Funkce $f(x)=\frac{1}{3^x+x}$ je na $\langle 51,\infty)$ kladná a klesající, což takhle integrální odhad?

$E\le\frac{1}{3^{51}+51}+\int\limits_{51}^{\infty}\frac{dx}{3^x+x}$. A tím jsme skončili, tento integrál neumíme.

Ještě je možné zkusit odhad shora, kdy ignorujeme jinou část jmenovatele, ale to bychom tam ignorovali to hlavní (pro velká k je tam 3^k dominantní) a nic dobrého se tak od toho čekat nedá:

$E\le\sum\limits_{k=51}^{\infty}\frac{2}{k}=\infty$, harmonická řada diverguje.

Víc nápadů nemám.

37. Chyba aproximace bude $E=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k!+1}-\sum\limits_{k=0}^{50}\frac{(-2)^k}{k!+1}=\sum\limits_{k=51}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^k}{k!+1}$.

Jak je velká? Protože jde o alternující řadu ve tvaru $\sum(-1)^k b_k$, kde $b_k=\frac{2^k}{k!+1}$ tvoří kladnou a klesající posloupnost, existuje pěkný odhad: $|E|\le b_{51}=\frac{2^{51}}{51!+1}\sim 1.45\cdot 10^{-51}$.

Už jsme viděli, že přístupy přes absolutní hodnotu bývají horší, takže to tak stačí.

A mimochodem, $\sum\limits_{k=51}^{\infty}\frac{2^k}{k!+1}$ ani $\sum\limits_{k=51}^{\infty}\frac{2^k}{k!}$ stejně nějak rozumně odhadnout neumíme: Integrovat to nejde, odhad shora něčím blízkým ale rozumnějším se také nenabízí.

38. Chyba aproximace bude $E=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4^k}-\sum\limits_{k=1}^{100}\frac{k}{4^k}=\sum\limits_{k=101}^{\infty}\frac{k}{4^k}$.

Jak je velká? Pokud bychom rádi horní odhad pomocí geometrické řady (tu sčítat umíme), tak máme problém s tím k v čitateli. Nicméně na druhý pohled to není tak marné. Víme, že pro velká k je $k\ll a^k$, takže stačí ověřit, že například $k\le 2^k$ platí pro $k\ge 101$ a můžeme odhadovat:

$$E\le\sum_{k=101}^{\infty}\frac{2^k}{4^k}=\sum_{k=101}^{\infty}\left(\tfrac12\right)^k=\left(\tfrac12\right)^{101}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac12\right)^k=\left(\tfrac12\right)^{101}\frac{1}{1-\frac12}=\frac{1}{2^{100}}\sim 7.89\cdot 10^{-31}.$$

Nabízí se i odhad z integrálního kritéria, funkce $f(x)=\frac{x}{4^x}$ je na $\langle 101,\infty)$ kladná a klesající:

$$E\le\tfrac{101}{4^{101}}+\int\limits_{101}^{\infty}x4^{-x}\,dx.$$

Teď trocha per-partes:

$$\int x4^{-x}\,dx=-\tfrac{1}{\ln(4)}x4^{-x}+\tfrac{1}{\ln(4)}\int 4^{-x}\,dx=-\tfrac{1}{\ln(4)}x4^{-x}-\tfrac{1}{[\ln(4)]^2}4^{-x}=-\tfrac{1}{[\ln(4)]^2}\tfrac{\ln(4)x-1}{4^x}$$

Proto $E\le\Big[-\tfrac{1}{[\ln(4)]^2}\tfrac{\ln(4)x-1}{4^x}\Big]_{101}^{\infty}=-\tfrac{1}{[\ln(4)]^2}\lim\limits_{x\to\infty}\big(\tfrac{\ln(4)x-1}{4^x}\big)+\tfrac{1}{[\ln(4)]^2}\tfrac{101\ln(4)-1}{4^{101}}$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=}}\tfrac{1}{[\ln(4)]^2}\tfrac{101\ln(4)-1}{4^{101}}-\tfrac{1}{[\ln(4)]^2}\lim_{x\to\infty}\big(\tfrac{\ln(4)}{\ln(4)4^x}\big)=\tfrac{1}{[\ln(4)]^2}\tfrac{101\ln(4)-1}{4^{101}}.$$

Takže $E \le \frac{101}{4^{101}} + \frac{1}{[\ln(4)]^2}\frac{101\ln(4)-1}{4^{101}} \sim 2.70\cdot 10^{-59}$.
Tento odhad je výrazně lepší, což se dalo čekat, u toho prvního jsme docela dost ztráceli tím $k \le 2^k$.

39. Chyba aproximace bude $E = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3\ln(k)1} - \sum\limits_{k=1}^{101}\frac{1}{k^3+\ln(k)} = \sum\limits_{k=101}^{\infty}\frac{1}{k^3+\ln(k)}$.
Jak je velká? Není moc na výběr. Horní odhad geometrickou řadou se nenabízí, funkci $\frac{1}{x^3+\ln(x)}$ integrovat neumíme, zbývá nějaký horní odhad. Protože je ve jmenovateli k^3 dominantní, nabízí se $E \le \sum\limits_{k=101}^{\infty}\frac{1}{k^3}$.
Pro toto sice nemáme vzoreček, ale už to umíme odhadnout z integrálního kritéria:
$E \le \sum\limits_{k=101}^{\infty}\frac{1}{k^3} \le \frac{1}{101^3} + \int\limits_{101}^{\infty}\frac{dx}{x^3}$.
Teď $\int\limits_{101}^{\infty}\frac{dx}{x^3} = \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_{101}^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{2x^2}\right) - \frac{-1}{2\cdot 101^2} = 0 + \frac{1}{2\cdot 101^2}$.
Proto $E \le \frac{1}{101^3} + \frac{1}{2\cdot 101^2} = \frac{103}{2\cdot 101^3} \sim 0.00005$.

40. Kladné členy, proto jdou testy. Nejlepší je limitní podílové:
$$\lambda = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1-1/2^k}{2-1/2^k}\right) = \frac{1}{2},$$
protože $\lambda = \frac{1}{2} < 1$, řada konverguje.
Šlo by i limitní odmocninové, ale $\sqrt[k]{2^k-1} \to 2$ vyžaduje víc práce. Integrální kritérium: $\int\frac{dx}{2^x-1}$ nezní lákavě.
Srovnávat jde $\frac{1}{2^k-1} \ge \frac{1}{2^k}$, tedy $\sum\frac{1}{2^k-1} \ge \sum\frac{1}{2^k} = \sum\left(\frac{1}{2}\right)^k$, řada napravo konverguje (geometrická, $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$), ale nerovnost má nevhodný směr.
Funguje ale limitní srovnávací: Ověříme, že $\frac{1}{2^k-1} \sim \frac{1}{2^k}$:
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2^k-1}}{\frac{1}{2^k}}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{2^k}{2^k-1}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1-1/2^k}\right) = 1 > 0.$$
Proto $\sum\frac{1}{2^k-1} \sim \sum\frac{1}{2^k} = \sum\left(\frac{1}{2}\right)^k$, řada napravo konverguje (viz geometrická), tedy i daná řada konverguje.

41. Kladné členy, proto jdou testy. Limitní odmocninové i podílové dá 1 čili nic, šlo by moc pěkně integrální: $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \left[\operatorname{arctg}(x)\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} < \infty$, integrál konverguje, proto i daná řada konverguje.
Kde také srovnávací: $\frac{1}{k^2+1} \le \frac{1}{k^2}$, proto $\sum\frac{1}{k^2+1} \le \sum\frac{1}{k^2}$, to vpravo konverguje, proto i to vlevo.
Šlo by i limitní srovnávací $\frac{1}{k^2+1} \sim \frac{1}{k^2}$, ověření podobné jako předchozí příklad, závěr také.

42. Kladné členy, proto jdou testy. Nejlepší je limitní podílové:
$$\lambda = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2\frac{2^k}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2},$$
protože $\lambda = \frac{1}{2} < 1$, řada konverguje.
Šlo by i limitní odmocninové, ale $\sqrt[k]{k+1} \to 1$ vyžaduje trochu práce (pokud dopředu nevíme, že $\sqrt[k]{p(k)} \to 1$ pro libovolný polynom p). Integrální kritérium by šlo, ale dvojí per partes nezní lákavě, srovnávat jde leda tak $\frac{(k+1)^2}{2^k} \sim \frac{k^2}{2^k}$, což jsme si moc nepomohli.

43. Kladné členy, proto jdou testy. Limitní odmocninové i podílové dá 1 čili nic, Integrální jde, ale parciální zlomky jsou nuda.
Nejlepší je srovnávací: $\frac{3k+1}{k^2-1} \ge \frac{3k}{k^2} = \frac{3}{k}$, proto $\sum\frac{3k+1}{k^2-1} \ge 3\sum\frac{1}{k} = \infty$. Daná řada diverguje.
Šlo by i limitní srovnávací $\frac{3k+1}{k^2-1} \sim \frac{3}{k}$, ověření:
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3k+1}{k^2-1}\,\frac{k}{3}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{3k^2+k}{3k^2-3}\right) = 1 > 0.$$
Proto $\sum\frac{3k+1}{k^2-1} \sim 3\sum\frac{1}{k} = \infty$ a je to.

44. Kladné členy, proto jdou testy. Faktoriál vylučuje všechny kromě podílového, zkusíme snadnější limitní:
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^2+1}}{\frac{k!}{k^2+1}} = \frac{(k+1)!}{k!}\,\frac{k^2+1}{k^2+2k+2} = (k+1)\,\frac{1+1/k^2}{1+2/k+2/k^2} \to \infty\cdot 1 = \infty = \lambda.$$
Protože $\lambda = \infty > 1$, daná řada diverguje.

45. Kladné členy, proto jdou testy. Ta mocnina volá po odmocninovém, zkusíme limitní:

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{\sqrt[k]{2}}{k+1} \to \frac{1}{\infty} = 0 = \varrho.$$

Protože $\varrho = 0 < 1$, daná řada konverguje.
Mimochodem, limitní podílové by byl hnus, integrace také, srovnávat není s čím.

46. Kladné členy, proto jdou testy. Limitní podílové a odmocninové dají 1 čili nic, integrálové vypadá pěkně hnusně, zbývá srovnávat. Zkusíme pracnější ale mocnější limitní. $\frac{1}{\sqrt{k^3-2}} \sim \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ potřebuje ověřit:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{k^3-2}}}{\frac{1}{\sqrt{k^3}}}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{\frac{k^3}{k^3-2}}\right) = 1 > 0.$$

Srovnání ověřeno, proto $\sum \frac{1}{\sqrt{k^3-2}} \sim \sum \frac{1}{\sqrt{k^3}} = \sum \frac{1}{k^{3/2}}$. Ta pravá řada konveguje, protože $p = \frac{3}{2} > 1$, tudíž konverguje i daná řada.
Srovnání by dalo nerovnost $\frac{1}{\sqrt{k^3-2}} \geq \frac{1}{\sqrt{k^3}}$, čili bylo by k ničemu.

47. Kladné členy, proto jdou testy. Faktoriál vylučuje všechny kromě podílového, zkusíme snadnější limitní:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!}\,\frac{2^{k+1}}{2^k} = 2\frac{1}{k+1} \to 0 = \lambda.$$

Protože $\lambda = 0 < 1$, daná řada konverguje.
Poznámka: Pokud je nám povoleno použít jako fakt, že $\sqrt[k]{k!} \to \infty$, pak lze i limitní odmocninové.

48. Kladné členy, proto jdou testy. Ta mocnina volá po odmocninovém, zkusíme limitní:

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{k-1}{k+1} \to 1 = \varrho,$$

takže nic. Limitní podílové by taky dalo 1, srovnávat nejde kvůli té mocnině k, neboť by vyšel neurčitý výraz $\left(\frac{k-1}{k+2}\right)^k \sim 1^\infty$. Co zbývá? Nutná podmínka. Co dělá a_k pro velká k? Přímo:

$$\lim_{k\to\infty}(a_k) = e^{\lim\limits_{k\to\infty}(x\ln(\frac{x-1}{x+2}))} = e^{\lim\limits_{k\to\infty}(\ln(\frac{x-1}{x+2})/(1/x))} = \left\langle\!\!\left\langle \frac{0}{0} \implies \mathrm{LH} \right\rangle\!\!\right\rangle = \ldots = e^{-3}.$$

Trikem: $\left(\frac{k-1}{k+2}\right)^k = \left(1 + \frac{-3}{k+2}\right)^k \to e^{-3}$.
Každopádně $a_k \to 0$ není pravda, proto $\sum a_k$ diverguje.
Poznámka: Všimněte si, že pro všechna k máme $\sqrt[k]{a_k} = \frac{k-1}{k+1} < 1$, ale řada diverguje. To ukazuje, že v odmocninovém testu opravdu nestačí, aby $\sqrt[k]{a_k}$ bylo menší než 1, ale je třeba, aby to bylo menší než nějaké číslo $q < 1$, jinými slovy, $\sqrt[k]{a_k}$ se nesmí k 1 přiblížit příliš blízko.

49. Kladné členy, proto jdou testy. Faktoriál vylučuje všechny kromě podílového, zkusíme snadnější limitní:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(2(k+1))!}{3^{k+1}}}{\frac{(2k)!}{3^k}} = \frac{(2k+2)!}{(2k)!}\,\frac{3^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}(2k+2)(2k+1) \to \infty = \lambda.$$

Protože $\lambda = \infty > 1$, daná řada diverguje.

50. Kladné členy, proto jdou testy. Limitní podílové dá 1 čili nic, limitní odmocninové dá tudíž také 1, ale dá to navíc víc práce. Šlo by integrovat (substitucí), protože funkce je klesající (důkaz přes derivaci) a nezáporná, vyjde

$$\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} = \Big[2\sqrt{u}\Big]_1^\infty = \infty.$$

Daná řada proto diverguje.
Šlo by i limitní srovnávací, $\frac{2k}{\sqrt{1+k^2}} \sim \frac{2k}{k} = 2$ se hravě ověří:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\frac{2k}{\sqrt{1+k^2}}}{2}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}}\right) = 1 > 0.$$

Tudíž $\sum \frac{2k}{\sqrt{1+k^2}} \sim \sum 2 = \infty$ a divergence je potvrzena.
Srovnání dává $\frac{2k}{\sqrt{1+k^2}} \leq 2$, čili prosté srovnávací by zde nedalo výsledek.

51. Kladné členy, proto jdou testy. Tohle volá po odmocninovém: $\sqrt[k]{a_k} = \frac{k+1}{2k} \to \frac{1}{2} = \varrho$. Protože $\varrho = \frac{1}{2} < 1$, daná řada konverguje.
Mimochodem, tohle vypadá velmi podobně tomu příkladu před chvílí. Co kdyby se zkusila nutná podmínka?

$$\lim_{k\to\infty}(a_k) = \left\langle\!\!\left\langle \frac{k+1}{2k} \to \frac{1}{2},\quad \left(\frac{1}{2}\right)^\infty = 0 \right\rangle\!\!\right\rangle = 0.$$

Takže $a_k \to 0$ a řada může i nemusí konvergovat. Teď to nepomohlo.

Rozdíl je v tom, že předtím jsme měli 1^∞, neurčitý výraz, který jednak způsobí, že odmocninové dá 1 a k ničemu nevede, druhak dá naději, že a_k nemusí jít k nule (kdyby v tom příkladu šlo $a_k \to 0$, tak bychom jej neuměli vyřešit, protože všechny ostatní testy také selhaly).
Teď ale máme $\left(\frac{1}{2}\right)^\infty = 0$, takže naopak nedostaneme nic z nutné podmínky $a_k \to 0$, ale zabere odmocninové kritérium.

52. Kladné členy, proto jdou testy. Tohle volá po odmocninovém, asi limitním:

$$\sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} \frac{\sqrt[k]{4}}{3}, & k \text{ sudé;} \\ \frac{1}{3}, & k \text{ liché} \end{cases} \quad \to \frac{1}{3} = \varrho.$$

Protože $\varrho = \frac{1}{3} < 1$, daná řada konverguje.
Šlo by i odmocninové, protože $\sqrt[k]{4} \le 2$ pro $k \ge 2$ a tudíž $\sqrt[k]{a_k} \le \frac{2}{3} = q < 1$ pro $k \in I\!N$.
Podílové by nešlo:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{3^{k+1}}}{\frac{4}{3^k}} = \frac{1}{12}, & k \text{ sudé;} \\ \frac{\frac{4}{3^{k+1}}}{\frac{1}{3^k}} = \frac{4}{3}, & k \text{ liché,} \end{cases}$$

takže ani neexistuje limita, dokonce ani nelze najít $\lambda < 1$, aby $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le \lambda$.

53. Protože $b_k = \frac{1}{\sqrt{2k-1}} \ge 0$, je nerostoucí a jde k nule, podle Leibnize daná řada konverguje.
Abs. konvce: $\sum \left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{2k-1}}\right| = \sum \frac{1}{\sqrt{2k-1}}$, srovnávací kritérium $\frac{1}{\sqrt{2k-1}} \ge \frac{1}{\sqrt{2k}}$ dá $\sum \frac{1}{\sqrt{2k-1}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$, takže řada nekonverguje absolutně.
Závěr: Daná řada konverguje neabsolutně.

54. Protože $b_k = \frac{2^k}{(k-1)!} \ge 0$, je nerostoucí a jde k nule, podle Leibnize daná řada konverguje.
Abs. konvce: $\sum \left|(-1)^k \frac{2^k}{(k-1)!}\right| = \sum \frac{2^k}{(k-1)!}$, limitní podílové kritérium dá $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2}{k} \to 0 < 1$, proto řada konverguje absolutně (tudíž i konverguje, nebylo potřeba Leibnizit).
Závěr: Daná řada konverguje absolutně.

55. Protože sice $b_k = \frac{1}{2^{-k}} = 2^k \ge 0$, ale je rostoucí, Leibniz použít nejde. Případnou neabsolutní konvergenci bychom tedy neuměli našimi metodami dokázat, takže to asi nebude ono. Proto to tedy buď užene absolutní konvergence, nebo budeme mít divergenci. Máme $b_k = 2^k \to \infty$, proto není pravda, že $a_k = (-1)^k 2^k = \pm 2^k \to 0$, a řada diverguje.
Poznámka: Pokus o absolutní konvci musí zákonitě selhat, a opravdu: $\sum |(-1)^k 2^k| = \sum 2^k = \infty$.

56. Protože $\cos(k)$ nejde $+-+-+-$, není to alternující řada a je po Leibnizovi. Protože to musíme být schopni vyřešit tím, co známe, zase to bude buď absolutní konvergence nebo divergence. Ale $a_k = \frac{\cos(k)}{k^2} \to 0$, takže divergenci nemáme, pořád nic nevíme.
Zkusíme abs. konvci: $\sum \left|\frac{\cos(k)}{k^2}\right| = \sum \frac{|\cos(k)|}{k^2}$, ten $|\cos(k)|$ zlobí, zkusíme srovnání: $\frac{|\cos(k)|}{k^2} \le \frac{1}{k^2}$, takže $\sum \frac{|\cos(k)|}{k^2} \le \sum \frac{1}{k^2}$. Řada vpravo konverguje, tudíž i ta vlevo, takže daná řada konverguje absolutně.

57. Protože $b_k = \frac{k}{k^2+1} \ge 0$, je nerostoucí a jde k nule, podle Leibnize daná řada konverguje.
Abs. konvce: $\sum \left|(-1)^k \frac{k}{k^2+1}\right| = \sum \frac{k}{k^2+1}$, limitní srovnávací kritérium dá po ověření

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\frac{k}{k^2+1}}{\frac{1}{k}}\right) = 1 > 0,$$

že $\frac{k}{k^2+1} \sim \frac{1}{k}$, proto $\sum \frac{k}{k^2+1} \sim \sum \frac{1}{k} = \infty$. Řada tedy nekonverguje absolutně.
Závěr: Daná řada konverguje neabsolutně.

58. Protože $b_k = \frac{k+1}{k-1} \ge 0$, je nerostoucí a nejde k nule, podle Leibnize daná řada diverguje.
Jde to také poznat podle toho, že $\frac{k+1}{k-1} \to 1$, proto rozhodně $(-1)^k \frac{k+1}{k-1} = \pm \frac{k+1}{k-1}$ nekonverguje k nule, takže není splněna nutná podmínka konvergence.

59. Protože $a_k = \frac{\sqrt{k+1}}{k^2+1} \ge 0$, absolutní konvergence a konvergence vyjdou nastejno. Řada tedy buď diverguje, nebo konverguje absolutně, a můžeme na ni aplikovat všechny testy pro nezáporné členy. Tohle nepůjde podílovým či odmocninovým (dají 1), ale limitní srovnávací to udolá. $\frac{\sqrt{k+1}}{k^2+1} \sim \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \frac{1}{k^{3/2}}$ se ověří:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\frac{\sqrt{k+1}}{k^2+1}}{\frac{\sqrt{k}}{k^2}}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\,\frac{k^2}{k^2+1}\right)=1>0,$$

tudíž $\sum\frac{\sqrt{k+1}}{k^2+1}\sim\sum\frac{1}{k^{3/2}}$. Řada napravo konverguje ($p=\frac{3}{2}>1$), proto konverguje i řada nalevo.
Závěr: Daná řada konverguje absolutně.

60. Protože sice $b_k=\frac{k^2-1}{k}\geq 0$, ale je rostoucí, Leibniz použít nejde. Případnou neabsolutní konvergenci bychom tedy neuměli našimi metodami dokázat, takže to asi nebude ono. Proto to tedy buď užene absolutní konvergence, nebo budeme mít divergenci. Máme $b_k=\frac{k^2-1}{k}\to\infty$, proto není pravda, že $a_k=(-1)^k\frac{k^2-1}{k}=\pm\frac{k^2-1}{k}\to 0$, a řada diverguje.
Poznámka: Pokus o absolutní konvergenci musí zákonitě selhat: $\sum\left|(-1)^k\frac{k^2-1}{k}\right|=\sum\left(k-\frac{1}{k}\right)\geq\sum 1=\infty$.

61. Protože $a_k=\frac{2^k-1}{k}\geq 0$, absolutní konvergence a konvergence vyjdou nastejno. Řada tedy buď diverguje, nebo konverguje absolutně, a můžeme na ni aplikovat všechny testy pro nezáporné členy. Faktoriál vylučuje všechny kromě podílového, zkusíme snadnější limitní:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{\frac{2^{k+1}-3(k+1)}{(k+1)!}}{\frac{2^k-3k}{k!}}=\frac{2^{k+1}-3k-3)}{2^k-3k}\,\frac{k!}{(k+1)!}=\frac{2-3k/2^k-3/2^k}{1-3k/2^k}\,\frac{1}{k+1}\to 2\frac{1}{\infty}=0=\lambda.$$

Použito $\lim\left(\frac{k}{2^k}\right)=0$ (dle l'Hospitala). Protože $\lambda=0<1$, řada konverguje.
Závěr: Daná řada konverguje absolutně.

62. $\sum 2^k(x-1)^k$, střed $x_0=1$.
Abs. konvce: $\sum|2^k(x-1)^k|=\sum 2^k|x-1|^k$, podílové: $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{2^{k+1}}{2^k}|x-1|\to 2|x-1|$,
konvergence pokud $2|x-1|<1$, tj. $|x-1|<\frac{1}{2}$, proto poloměr konvergence $r=\frac{1}{2}$, krajní body $1\pm\frac{1}{2}$.
$\underline{x=\frac{3}{2}}$: $\sum 2^k\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum 1$ diverguje.
$\underline{x=\frac{1}{2}}$: $\sum 2^k\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\sum(-1)^k$ diverguje.
Závěr: Daná řada konverguje absolutně a konverguje na $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

63. $\sum\frac{k+1}{k^2+1}\left(\frac{x}{3}-1\right)^k=\sum\frac{k+1}{k^2+1}\left(\frac{x-3}{3}\right)^k=\sum\frac{k+1}{(k^2+1)3^k}(x-3)^k$, střed $x_0=3$.
Abs. konvce: $\sum\left|\frac{k+1}{(k^2+1)3^k}(x-3)^k\right|=\sum\frac{k+1}{(k^2+1)3^k}|x-3|^k$, podílové:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{3^k}{3^{k+1}}\,\frac{k+2}{k+1}\,\frac{k^2+1}{(k+1)^2+1}|x-3|\to\frac{1}{3}|x-3|,$$

konvergence pokud $\frac{1}{3}|x-3|<1$, tj. $|x-3|<3$, proto poloměr konvergence $r=3$, krajní body 3 ± 3.
$\underline{x=6}$: $\sum\frac{k+1}{k^2+1}$ diverguje limitním srovnávacím, $\frac{k+1}{k^2+1}\sim\frac{1}{k}$ (ověřit!).
$\underline{x=0}$: $\sum(-1)^k\frac{k+1}{k^2+1}$ konverguje Leibnizem.
Závěr: Daná řada konverguje absolutně na $(0,6)$, konverguje na $\langle 0,6)$.

64. $\sum(kx)^k=\sum k^kx^k$, střed $x_0=0$.
Abs. konvce: $\sum\left|k^kx^k\right|=\sum k^k|x|^k$, odmocninové: $\sqrt[k]{a_k}=k|x|\to\begin{cases}\infty, & |x|\neq 0,\\ 0, & |x|=0,\end{cases}$ konvergence pokud $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sqrt[k]{a_k}\right)<1$, tj. $|x|=0$, proto poloměr konvergence $r=0$.
Závěr: Daná řada konverguje absolutně a konverguje na $\{0\}$.

65. $\sum\left(\frac{3x+6}{2}\right)^k=\sum\left(\frac{3}{2}(x+2)\right)^k=\sum\left(\frac{3}{2}\right)^k(x-(-2))^k$, střed $x_0=-2$.
Abs. konvce: $\sum\left|\left(\frac{3}{2}\right)^k(x+2)^k\right|=\sum\left(\frac{3}{2}\right)^k|x+2|^k$, odmocninové (tady by šlo moc hezky i podílové):

$$\sqrt[k]{a_k}=\frac{3}{2}|x+2|\to\frac{3}{2}|x+2|,$$

konvergence pokud $\frac{3}{2}|x+2|<1$, tj. $|x+2|<\frac{2}{3}$, proto poloměr konvergence $r=\frac{2}{3}$, krajní body $-2\pm\frac{2}{3}$.
$\underline{x=-\frac{4}{3}}$: $\sum 1=\infty$, diverguje.
$\underline{x=-\frac{8}{3}}$: $\sum(-1)^k$, diverguje.
Závěr: Daná řada konverguje absolutně a konverguje na $\left(-\frac{8}{3},-\frac{4}{3}\right)$.

66. $\sum k(-(x-1))^k=\sum k(-1)^k(x-1)^k$, střed $x_0=1$.

Abs. konvce: $\sum\big|k(-1)^k(x-1)^k\big| = \sum k|x-1|^k$, odmocninové: $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{k}|x-1| \to 1\cdot|x-1| = |x-1|$, konvergence pokud $|x-1|<1$, proto poloměr konvergence $r=1$, krajní body 1 ± 1.
$\underline{x=2}$: $\sum k(-1)^k$ diverguje ($k(-1)^k \not\to 0$).
$\underline{x=0}$: $\sum k1^k = \sum k$ diverguje.
Závěr: Daná řada konverguje absolutně a konverguje na $(0,2)$.

67. $\sum\big(\frac{x}{k}\big)^k = \sum \frac{1}{k^k}x^k$, střed $x_0=0$.
Abs. konvce: $\sum\big|\frac{1}{k^k}x^k\big| = \sum\frac{1}{k^k}|x|^k$, odmocninové: $\sqrt[k]{a_k} = \frac{|x|}{k} \to 0$, konvergence pokud $\lim\limits_{k\to\infty}\big(\sqrt[k]{a_k}\big) < 1$, tj. vždy, proto poloměr konvergence $r=\infty$.
Závěr: Daná řada konverguje absolutně a konverguje na $I\!R$.

68. $\sum\frac{2^k}{k^2-k}(x-2)^k$, střed $x_0=2$.
Abs. konvce: $\sum\big|\frac{2^k}{k^2-k}(x-2)^k\big| = \sum\frac{2^k}{k^2-k}|x-2|^k$, podílové: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}}{2^k}\frac{k^2-k}{(k+1)^2-(k+1)}|x-2| \to 2|x-2|$, konvergence pokud $2|x-2|<1$, tj. $|x-2|<\frac{1}{2}$, proto poloměr konvergence $r=\frac{1}{2}$, krajní body $2\pm\frac{1}{2}$.
$\underline{x=\frac{5}{2}}$: $\sum\frac{1}{k^2-k}$ diverguje limitním srovnávacím, $\frac{1}{k^2-k}\sim\frac{1}{k^2}$ (ověřit!).
$\underline{x=\frac{3}{2}}$: $\sum(-1)^k\frac{1}{k^2-k}$ konverguje Leibnizem nebo přes absolutní konvergenci. Konvergují oba krajní body, proto absolutní konvergence.
Závěr: Daná řada konverguje absolutně a konverguje na $\big\langle\frac{3}{2},\frac{5}{2}\big\rangle$.

69. $\sum\frac{(2x+1)^k}{k+1} = \sum\frac{2^k(x+1/2)^k}{k+1} = \sum\frac{2^k}{k+1}\big(x-\big(-\frac{1}{2}\big)\big)^k$, střed $x_0=-\frac{1}{2}$.
Abs. konvce: $\sum\big|\frac{2^k}{k+1}\big(x+\frac{1}{2}\big)^k\big| = \sum\frac{2^k}{k+1}\big|x+\frac{1}{2}\big|^k$, podílové: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}}{2^k}\frac{k}{k+1}\big|x+\frac{1}{2}\big| \to 2\big|x+\frac{1}{2}\big|$, konvergence pokud $2\big|x+\frac{1}{2}\big|<1$, tj. $\big|x+\frac{1}{2}\big|<\frac{1}{2}$, proto poloměr konvergence $r=\frac{1}{2}$, krajní body $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}$.
$\underline{x=0}$: $\sum\frac{1}{k+1}$ diverguje limitním srovnávacím, $\frac{1}{k+1}\sim\frac{1}{k}$ (ověřit!).
$\underline{x=-1}$: $\sum(-1)^k\frac{1}{k+1}$ konverguje Leibnizem.
Závěr: Daná řada konverguje absolutně na $(-1,0)$, konverguje na $\langle -1,0)$.

70. $\sum\frac{1}{1+2^{-k}}\big(2-\frac{x}{4}\big)^k = \sum\frac{1}{1+2^{-k}}\big(-\frac{x-8}{4}\big)^k = \sum(-1)^k\frac{1}{(1+2^{-k})4^k}(x-8)^k$, střed $x_0=8$.
Abs. konvce: $\sum\big|(-1)^k\frac{1}{(1+2^{-k})4^k}(x-8)^k\big| = \sum\frac{1}{(1+2^{-k})4^k}|x-8|^k$, podílové:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1+2^{-k}}{1+2^{-k-1}}\frac{4^k}{4^{k+1}}|x-8| = \Big\langle\!\Big\langle 2^{-k}\to 0,\ 2^{-k-1}\to 0\Big\rangle\!\Big\rangle \to \frac{1}{4}|x-8|,$$

konvergence pokud $\frac{1}{4}|x-8|<1$, tj. $|x-8|<4$, proto poloměr konvergence $r=4$, krajní body 8 ± 4.
$\underline{x=12}$: $\sum\frac{1}{1+2^{-k}}$ diverguje limitním srovnávacím, $\frac{1}{1+2^{-k}}\sim 1$ (ověřit!), nebo prostě diverguje, protože $a_k\to 1$, tedy není pravda, že $a_k\to 0$.
$\underline{x=4}$: $\sum(-1)^k\frac{1}{1+2^{-k}}$ diverguje, protože $a_k=\pm\frac{1}{1+2^{-k}}$ nejde k nule.
Závěr: Daná řada konverguje absolutně a konverguje na $(4,12)$.

71. $(x+1)e^{x-1}+1 = x\,e^{-1}e^x + e^{-1}e^x + 1 = \Big\langle\!\Big\langle x\in I\!R,\ r=\infty\Big\rangle\!\Big\rangle = x\,e^{-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} + e^{-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} + 1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{k!}x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{k!}x^k + 1 = \left|\begin{matrix} n=k+1\\ k=n-1\end{matrix}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-1}}{(n-1)!}x^n + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{k!}x^k + 1$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{ke^{-1}}{k!}x^k + e^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-1}}{k!}x^k + 1 = (1+e^{-1}) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-1}(k+1)}{k!}x^k;\ x\in I\!R.$$

72. $(2x-\pi)\cos(x) = 2x\cos(x)-\pi\cos(x) = \Big\langle\!\Big\langle x\in I\!R,\ r=\infty\Big\rangle\!\Big\rangle = 2x\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} - \pi\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{(2k)!}x^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\pi}{(2k)!}x^{2k};\ x\in I\!R.$$

Řady nedáváme dohromady, protože mocniny x jsou jiné (v první řadě liché, v druhé sudé).

73. $\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2(x-1)+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}(x-1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-(-\frac{2}{3}(x-1))} = \Big\langle\!\Big\langle \text{pro } |y| = \big|-\frac{2}{3}(x-1)\big| < 1 \implies |x-1|<\frac{3}{2},\ r=\frac{3}{2}\Big\rangle\!\Big\rangle$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\big(-\tfrac{2}{3}(x-1)\big)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^k}{3^{k+1}}(x-1)^k;\ x\in\big(-\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{2}\big).$$

74. $(x+2)e^{x/3}+1=(x-1+3)e^{(x-1)/3+1/3}+1=(x-1)e^{1/3}e^{(x-1)/3}+3e^{1/3}e^{(x-1)/3}+1$
$=\left\langle\!\!\left\langle \text{pro } y=(x-1)/3\in\mathbb{R} \implies x\in\mathbb{R},\ r=\infty \right\rangle\!\!\right\rangle$
$=(x-1)e^{1/3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{[(x-1)/3]^k}{k!}+3e^{1/3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{[(x-1)/3]^k}{k!}+1$
$=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{e^{1/3}}{3^k k!}(x-1)^{k+1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{3e^{1/3}}{3^k k!}(x-1)^k+1=\left|\begin{matrix}n=k+1\\ k=n-1\end{matrix}\right|$
$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/3}}{3^{n-1}(n-1)!}(x-1)^n+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{3e^{1/3}}{3^k k!}(x-1)^k+1=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k\,e^{1/3}}{3^{k-1}k!}(x-1)^k+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{e^{1/3}}{3^{k-1}k!}(x-1)^k+1$
$=[3e^{1/3}+1]+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{e^{1/3}(k+1)}{3^{k-1}k!}(x-1)^k;\ x\in\mathbb{R}.$

75. $(x-\pi)\cos(3x)+2x=(x-\pi)\cos\big(3(x-\pi)+3\pi\big)+2x=-(x-\pi)\cos\big(3(x-\pi)\big)+2(x-\pi)+2\pi$
$=\left\langle\!\!\left\langle \text{pro } y=3(x-\pi)\in\mathbb{R} \implies x\in\mathbb{R},\ r=\infty \right\rangle\!\!\right\rangle=-(x-\pi)\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{[3(x-\pi)]^{2k}}{(2k)!}+2(x-\pi)+2\pi$
$=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^{2k}}{(2k)!}(x-\pi)^{2k+1}+2(x-\pi)+2\pi$
$=2\pi+(x-\pi)+\sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^{2k}}{(2k)!}(x-\pi)^{2k+1};\ x\in\mathbb{R}.$

76. $\frac{2x+4}{x+1}=2+2\frac{1}{x+1}=2+2\frac{1}{1-(-x)}=\left\langle\!\!\left\langle \text{pro } |y|=|-x|<1 \implies |x|<1,\ r=1 \right\rangle\!\!\right\rangle$
$=2+2\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-x)^k=2+\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2x^k=4+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2x^k;\ x\in(-1,1).$

77. $(2x+3)e^{2x}+x=(2(x+1)+1)e^{2(x+1)-2}+x=2(x+1)e^{-2}e^{2(x+1)}+e^{-2}e^{2(x+1)}+(x+1)-1$
$=\left\langle\!\!\left\langle \text{pro } y=2(x+1)\in\mathbb{R} \implies x\in\mathbb{R},\ r=\infty \right\rangle\!\!\right\rangle$
$=2(x+1)e^{-2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{[2(x+1)]^k}{k!}+e^{-2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{[2(x+1)]^k}{k!}+(x+1)-1$
$=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+1}e^{-2}}{k!}(x+1)^{k+1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k e^{-2}}{k!}(x+1)^k+(x+1)-1=\left|\begin{matrix}n=k+1\\ k=n-1\end{matrix}\right|$
$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n e^{-2}}{(n-1)!}(x+1)^n+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k e^{-2}}{k!}(x+1)^k+(x+1)-1$
$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k2^k e^{-2}}{k!}(x+1)^k+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k e^{-2}}{k!}(x+1)^k+(x+1)-1$
$=[e^{-2}-1]+[4e^{-2}+1](x+1)+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{2^k e^{-2}(k+1)}{k!}(x+1)^k;\ x\in\mathbb{R}.$

78. $(x+1)\sin(2\pi x)+3=(x+1)\sin\big(2\pi(x+1)-2\pi\big)+3=(x+1)\sin\big(2\pi(x+1)\big)+3$
$=\left\langle\!\!\left\langle \text{pro } y=2\pi(x+1)\in\mathbb{R} \implies x\in\mathbb{R},\ r=\infty \right\rangle\!\!\right\rangle=(x+1)\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{[2\pi(x+1)]^{2k+1}}{(2k+1)!}+3$
$=3+\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k+1}\pi^{2k+1}}{(2k+1)!}(x+1)^{2k+2};\ x\in\mathbb{R}.$

79. $\frac{x+3}{x-3}=1+6\frac{1}{x-3}=1-6\frac{1}{5-(x+2)}=1-\frac{6}{5}\frac{1}{1-\frac{x+2}{5}}$
$=\left\langle\!\!\left\langle \text{pro } |y|=|(x+2)/5|<1 \implies |x+2|<5,\ r=5 \right\rangle\!\!\right\rangle$
$=1-\frac{6}{5}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{5}\right)^k=1-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{6}{5^{k+1}}(x+2)^k=-\frac{1}{5}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{6}{5^{k+1}}(x+2)^k;\ x\in(-7,3).$

80. $x\sin(2x)+2x=(x-\pi+\pi)\sin\big(2(x-\pi)+2\pi\big)+2(x-\pi)=(x-\pi)\sin\big(2(x-\pi)\big)+\pi\sin\big(2(x-\pi)\big)+2(x-\pi)$
$=\left\langle\!\!\left\langle \text{pro } y=2(x-\pi)\in\mathbb{R} \implies x\in\mathbb{R},\ r=\infty \right\rangle\!\!\right\rangle$
$=(x-\pi)\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{[2(x-\pi)]^{2k+1}}{(2k+1)!}+\pi\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{[2(x-\pi)]^{2k+1}}{(2k+1)!}+2(x-\pi)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \tfrac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}(x-\pi)^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \tfrac{2^{2k+1}\pi}{(2k+1)!}(x-\pi)^{2k+1} + 2(x-\pi)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \tfrac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}(x-\pi)^{2k+2} + 2(1+\pi)(x-\pi) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \tfrac{2^{2k+1}\pi}{(2k+1)!}(x-\pi)^{2k+1};\ x \in I\!R.$$

81. $\frac{1}{(2-x)^2} = \big[\frac{1}{2-x}\big]' = \big[\frac{1}{3-(x+1)}\big]' = \big[\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+1}{3}}\big]'$
$$= \Big\langle\!\!\Big\langle \text{pro } |y| = |(x+1)/3| < 1 \implies |x+1| < 3,\ r = 3 \Big\rangle\!\!\Big\rangle = \Big[\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tfrac{x+1}{3}\big)^k\Big]' = \Big[\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{3^{k+1}}(x+1)^k\Big]'$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{k}{3^{k+1}}(x+1)^{k-1} = \begin{vmatrix} n = k-1 \\ k = n+1 \end{vmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{n+1}{3^{n+2}}(x+1)^n;\ x \in (-4,2).$$

82. $\sin(x) = \sin\big((x-1)+1\big) = \sin(x-1)\cos(1) + \sin(1)\cos(x-1)$
$$= \Big\langle\!\!\Big\langle \text{pro } y = x-1 \in I\!R \implies x \in I\!R,\ r = \infty \Big\rangle\!\!\Big\rangle$$
$$= \cos(1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\tfrac{(x-1)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sin(1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\tfrac{(x-1)^{2k}}{(2k)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\tfrac{\cos(1)}{(2k+1)!}(x-1)^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\tfrac{\sin(1)}{(2k)!}(x-1)^{2k};\ x \in I\!R.$$

Řady nedáváme dohromady, protože mocniny x jsou jiné (v první řadě liché, v druhé sudé).

83. $\frac{1}{(2+x)^2} = \big[\frac{-1}{2+x}\big]' = -\big[\frac{1}{1+(x+1)}\big]' = -\big[\frac{1}{1-(-(x+1))}\big]'$
$$= \Big\langle\!\!\Big\langle \text{pro } |y| = |-(x+1)| < 1 \implies |x+1| < 1,\ r = 1 \Big\rangle\!\!\Big\rangle = -\Big[\sum_{k=0}^{\infty}(-(x+1))^k\Big]'$$
$$= \Big[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(x+1)^k\Big]' = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k(x+1)^{k-1} = \begin{vmatrix} n = k-1 \\ k = n+1 \end{vmatrix}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+2}(k+1)(x+1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)(x+1)^k;\ x \in (-2,0).$$

84. $\operatorname{arctg}(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2+1} = \int_0^x \frac{dt}{1-(-t^2)} = \Big\langle\!\!\Big\langle \text{pro } |y| = |-t^2| < 1 \implies |t| < 1,\ r = 1 \Big\rangle\!\!\Big\rangle$
$$= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-t^2)^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^k t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\Big[(-1)^k\tfrac{t^{2k+1}}{2k+1}\Big]_0^x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\tfrac{x^{2k+1}}{2k+1};\ x \in (-1,1).$$

Alternativa:

$\operatorname{arctg}(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{dx}{1-(-x^2)} = \Big\langle\!\!\Big\langle \text{pro } |y| = |-x^2| < 1 \implies |x| < 1,\ r = 1 \Big\rangle\!\!\Big\rangle$
$$= \int \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int(-1)^k x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\tfrac{x^{2k+1}}{2k+1} + C;\ x \in (-1,1).$$

Kolik je C? Dosadíme nějaké pěkné číslo, třeba $x = 0$:
$$\operatorname{arctg}(0) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\tfrac{0^{2k+1}}{2k+1} + C \implies 0 = 0 + C \implies C = 0.$$

85. $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e\,e^{x-1} + e^{-1}e^{-(x-1)})$
$$= \Big\langle\!\!\Big\langle \text{pro } y = (x-1) \in I\!R \implies x \in I\!R,\ r = \infty \Big\rangle\!\!\Big\rangle = \tfrac{1}{2}\Big(e\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(x-1)^k}{k!} + e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{[-(x-1)]^k}{k!}\Big)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{\frac{1}{2}e}{k!}(x-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\tfrac{\frac{1}{2}e^{-1}}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{e+(-1)^k e^{-1}}{2k!}(x-1)^k;\ x \in I\!R.$$

86. $x\cos(3x^2) = \Big\langle\!\!\Big\langle \text{pro } y = 3x^2 \in I\!R \implies x \in I\!R,\ r = \infty \Big\rangle\!\!\Big\rangle = x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{[3x^2]^{2k}}{(2k)!}$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\tfrac{9^k}{(2k)!}x^{4k+1};\ x \in I\!R.$$