MA1: Řešené příklady—funkce: limity

1. Najděte definiční obor a limity v hraničních bodech funkce $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{x^2-4}$.

2. Najděte definiční obor a limity v hraničních bodech funkce $f(x) = \sqrt[x]{\ln(x)}$.

3. Spočítejte limitu funkce $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3}{x^2 + x + 1}$ v bodě $a = \infty$.

4. Spočítejte limitu funkce $f(x) = \frac{3^x + 1}{4^x - 2^x}$ v bodech $a = 0^+$ a $a = \infty$.

5. Spočítejte limitu funkce $f(x) = \sqrt[x]{\cos(x) + x + 2}$ v bodech $a = 0$ a $a = \infty$.

6. Spočítejte $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{e^x - ep}{x - p^2}\right)$ v závislosti na parametru p.

7. Najděte hodnoty parametru a, pro které limita $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x - a^2}{\ln(x)}\right)$ konverguje, a pak ji pro tuto hodnotu vypočítejte

8. Najděte případné asymptoty funkce $f(x) = \frac{x+1}{2^x - 1}$ v 0 a v ∞.

9. Najděte případnou asymptotu funkce $f(x) = \ln(2e^x + x)$ v nekonečnu.

10. Prozkoumejte spojitost v bodě $a = 1$ funkce $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+2} - 2}{x - 1}; & x > 1, \\ 0, & x = 1; \\ \arccos(x)e^{1/\ln(x)}, & x < 1. \end{cases}$

Řešení:

Poznámka o zápisu: Do výpočtu často vkládám vysvětlující poznámky mezi $\left\langle\!\!\left\langle \text{závorky} \right\rangle\!\!\right\rangle$, jde o mé soukromé značení, abych nemusel výpočty přerušovat; většinu toho bych při normálním psaní řešení neuváděl. Nicméně hlavně u zkoušky bývá dobré řešení komentovat, aby zkoušející viděl, že jsem výsledek nezískal jinak (třeba osvícením shůry). Jmenovitě, u limit je často používanou možností přidávat odkazy na známé věci nad (či pod) rovnítko, jde zejména o indikaci použití l'Hospitalova pravidla či kritické mezikroky.
Pro studenta však bývá těžké odhadnout, co je vyučující ochoten akceptovat jako fakt a co chce dovysvětlit. Zde vysvětluji více, než je třeba, a dělám ve výpočtu víc kroků; myslím, že tu víceméně "správnou" míru komentování a detailů student najde v Příkladech k procvičování.

1. Nejprve určíme definiční obor. Jsou dvě omezení, jmenovatel vyžaduje $x \neq \pm 2$ a logaritmus chce kladný argument, tedy $x > 2$. Závěr: $D(f) = (2, \infty)$.
Hraniční body jsou dva, nekonečno a 2, kam se půjde jen zprava. Začneme dosazením **nekonečna**:

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)\big) = \left\langle\!\!\left\langle \tfrac{\infty}{\infty} \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Tento neurčitý podíl se nejlépe dělá l'Hospitalem.

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)\big) \underset{\text{l'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{[\ln(x-2)]'}{[x^2-4]'}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x-2}\cdot 1}{2x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x(x-2)}\right) = \left\langle\!\!\left\langle \tfrac{1}{\infty\cdot\infty} = \tfrac{1}{\infty} \right\rangle\!\!\right\rangle = 0.$$

Teď zkusíme **dvojku zprava**.

$$\lim_{x\to 2^+}\big(f(x)\big) = \left\langle\!\!\left\langle \tfrac{\ln(0^+)}{0} = \tfrac{-\infty}{0} \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Ve jmenovateli vyjde nula, ale v čitateli není, nejde tedy o neurčitý podíl, a proto nelze použít l'Hospitalovo pravidlo. U výrazů typu $\frac{a}{0}$ pro nenulové a je třeba si rozmyslet, zda bude nula ve jmenovateli jednostranná, tedy zda pro x blízká k 2 ale o trochu větší nemá jmenovatel stále stejné znaménko. To je ale snadné, $x \to 2^+$ znamená mimo jiné $x > 2$ a tedy $x^2 - 4 > 0$.

$$\lim_{x\to 2^+}\big(f(x)\big) = \left\langle\!\!\left\langle \tfrac{\ln(0^+)}{0^+} = \tfrac{-\infty}{0^+} \right\rangle\!\!\right\rangle = -\infty.$$

2. Je to obecná mocnina, nejprve ji musíme převést pomocí vzorce $f^g = e^{g\ln(f)}$:

$$f(x) = [\ln(x)]^{1/x} = e^{\frac{\ln(\ln(x))}{x}}.$$

Exponenciála spolkne všechno, jsou tedy tři zdroje problémů. Zlomek vyžaduje nenulový jmenovatel, tedy $x \neq 0$. Vnitřní logaritmus vyžaduje $x > 0$. I vnější logaritmus potřebuje kladný argument, tedy $\ln(x) > 0$. Odtud $x > 1$ například z grafu nebo povýšením obou stran nerovnosti na e: $e^{\ln(x)} > e^0$.

Definiční obor je tedy $(1,\infty)$. Má dva hraniční body, 1 (tam bude limita zprava) a nekonečno, začneme **jedničkou**, odmocniny je vhodné napsat jako mocniny:

$$\lim_{x\to 1^+}\big([\ln(x)]^{1/x}\big) = \left\langle\!\!\left\langle 0^1 \right\rangle\!\!\right\rangle = 0.$$

Pokud si nejsme jistí, kolik je 0^1 (mocniny jsou zrádné), je možno použít zase tvaru s exponenciálou, kterou lze coby spojitou funkci vytáhnout ven z limity.

$$\lim_{x\to 1^+}\big((\ln(x))^{1/x}\big) = \lim_{x\to 1^+}\big(e^{(1/x)\cdot\ln(\ln(x))}\big) = e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{\ln(\ln(x))}{x}\right)} = \left\langle\!\!\left\langle \tfrac{\ln(\ln(1^+))}{1} = \ln(0^+) \right\rangle\!\!\right\rangle = e^{-\infty} = 0.$$

Kde se vzaly ty plusy a mínusy? Když je x číslo blízké 1 ale o trochu větší (tj. 1^+), pak $\ln(x) > 0$. Proto $\ln(1^+) = 0^+$.

Limita v **nekonečnu**:

$$\lim_{x\to\infty}\big((\ln(x))^{1/x}\big) = \left\langle\!\!\left\langle \infty^0 \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Protože je ∞^0 neurčitý výraz, teď už není na výběr a musí se použít tvar "e na logaritmus". Převod je stejný jako u předchozí limity, a abychom nemuseli pořád to e opisovat, podíváme se nejprve na limitu exponentu:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(\ln(x))}{x}\right) = \left\langle\!\!\left\langle \tfrac{\ln(\ln(\infty))}{\infty} = \tfrac{\ln(\infty)}{\infty} = \tfrac{\infty}{\infty} \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Tohle volá po l'Hospitalově pravidlu.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(\ln(x))}{x}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=}} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{[\ln(\ln(x))]'}{[x]'}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x\,\ln(x)}\right) = \left\langle\!\!\left\langle \tfrac{1}{\infty\ln(\infty)} = \tfrac{1}{\infty} \right\rangle\!\!\right\rangle = 0.$$

Teď nesmíme zapomenout dosadit zpět do exponenciály.

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)\big) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(\ln(x))}{x}\right)} = e^0 = 1.$$

3. Jako obvykle začneme dosazením limitního bodu.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4 - 2x^3}{x^2 + x + 1}\right) = \left\langle\!\!\left\langle \tfrac{\infty-\infty}{\infty} \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Máme součin, o kterém ani nevíme, zda je neurčitý, protože v čitateli máme pro změnu neurčitý rozdíl. Nicméně obecná verze l'Hospitalova pravidla platí i pro výraz "něco děleno nekonečnem", takže se to dá zkusit:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4 - 2x^3}{x^2 + x + 1}\right) \overset{\frac{?}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=}} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3 - 6x^2}{2x + 1}\right) \overset{\frac{?}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=}} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{12x^2 - 12x}{2}\right) = \lim_{x\to\infty}(6x^2 - 6x) = \left\langle\!\!\left\langle \infty - \infty \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Máme neurčitý rozdíl, který se většinou převádí algebraicky na součin či podíl. Při práci s polynomy v nekonečnu ve většině případů funguje nejlépe vytýkání nejvyšší mocniny.

$$\lim_{x\to\infty}(6x^2-6x)=\lim_{x\to\infty}\Big(x^2\big(6-\tfrac{6}{x}\big)\Big)\overset{\infty\cdot(6-0)}{=\!=\!=}\infty.$$

Toto je typické. Výraz, který po vytknutí nejvyšší mocniny zůstane, vždy konverguje a neovlivní, zda výsledná limita konverguje či diverguje. O tom rozhodne vytknutá mocnina, která tak vlastně reprezentuje chování celého výrazu v nekonečnu. Tento trik lze aplikovat rovnou na danou limitu, kde si budeme reprezentovat čitatel i jmenovatel vytknutými dominantními mocninami.

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{x^4-2x^3}{x^2+x+1}\Big)=\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{x^4}{x^2}\cdot\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\Big)=\lim_{x\to\infty}\Big(x^2\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\Big)\overset{\frac{1-0}{1+0+0}}{=\!=\!=}\infty.$$

Toto bývá nejrychlejší metoda při hledání limity podílu polynomů v nekonečnu. Výpočetně ještě rychlejší bývá zkrácení mocniny v celém zlomku, ale to funguje zaručeně jen v případě, kdy je vedoucí mocnina v čitateli i jmenovateli stejná. Jinak to vůbec fungovat nemusí, ověřte si, že když zkusíte v dané limitě zkrátit ve zlomku x^2, povede to na výraz $\infty-\infty$, krácení x^4 vede na výraz $\frac{1}{0}$ a krácení x^3 na kombinovaný průšvih $\frac{\infty-\infty}{0}$.
Zkušený počtář dokáže výsledek limit tohoto typu rovnou hádnout, protože ví, že v nekonečnu se každý polynom chová jako svá nejvyšší mocnina. To je velice užitečné. Tato metoda se umí vyrovnat i s přítomností odmocnin, viz příklad na testování spojitosti.

4. Otázky mají smysl, protože definiční obor je evidentně $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Nejprve dosadíme **plusovou nulu** do funkce:

$$\lim_{x\to 0^+}\big(f(x)\big)=\Big\langle\!\!\Big\langle\tfrac{2}{0}\Big\rangle\!\!\Big\rangle.$$

Je nutno zjistit, jaká je nula ve jmenovateli. Nejlepší přístup je nejprve výraz upravit vytknutím členu, který je vždy kladný, takže výsledné znaménko neovlivní: $4^x-2^x=2^x(2^x-1)$. Protože pro $x>0$ platí $2^x>1$, je pro malá kladná x také $2^x-1>0$, proto je výraz ve jmenovateli kladný. Můžeme tedy dokončit řešení:

$$\lim_{x\to 0^+}\big(f(x)\big)\overset{\frac{2}{0^+}}{=\!=\!=}\infty.$$

Mimochodem, limita v 0 zleva vyjde $-\infty$, zkuste si to.

Teď zkusíme dosadit **nekonečno**:

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)\big)=\Big\langle\!\!\Big\langle\tfrac{\infty+1}{\infty-\infty}=\tfrac{\infty}{?}\Big\rangle\!\!\Big\rangle.$$

Protože jde o podíl lineárních kombinací mocnin, doporučená metoda je udělat si v nekonečnech pořádek vytknutím dominantních mocnin z každé lineární kombinace. Předchozí příklad pracoval s mocninami klasickými, ale metoda funguje i pro mocniny typu a^x, tj. exponenciály.

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)\big)=\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{3^x}{4^x}\frac{1+\frac{1}{3^x}}{1-\frac{1}{2^x}}\Big)=\lim_{x\to\infty}\Big(\big(\tfrac{3}{4}\big)^x\frac{1+\frac{1}{3^x}}{1-\frac{1}{2^x}}\Big)$$
$$=\Big\langle\!\!\Big\langle\big|\tfrac{3}{4}\big|<1\implies\big(\tfrac{3}{4}\big)^\infty=0\Big\rangle\!\!\Big\rangle=\Big\langle\!\!\Big\langle 0\cdot\tfrac{1+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=0\cdot\tfrac{1+0}{1-0}\Big\rangle\!\!\Big\rangle=0.$$

Poznámka: Mimo jiné jsme po vytknutí viděli, že i jmenovatel jde do nekonečna, takže daný výraz je vlastně typu $\frac{\infty}{\infty}$. Na takové typicky používáme l'Hospitala, ale na exponenciály se nehodí:

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)\big)\underset{\text{l'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=\!=}}\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{[3^x+1]'}{[4^x-2^x]'}\Big)=\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{\ln(3)3^x}{\ln(4)4^x-\ln(2)2^x}\Big)=\Big\langle\!\!\Big\langle\tfrac{\infty}{\infty-\infty}\Big\rangle\!\!\Big\rangle.$$

Nijak jsme si nepomohli. Zkuste si udělat pět až deset dalších l'Hospitalů, bude to pořád stejný problém, jen těch logaritmů přibude.
Poznámka: Jako bonus se podíváme na třetí hraniční bod $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)\big)=\Big\langle\!\!\Big\langle\tfrac{0+1}{0-0}=\tfrac{1}{0}\Big\rangle\!\!\Big\rangle.$$

Jaká je tam nula? Zkusíme podobný trik, vytkneme $2^x > 0$: $4^x - 2^x = 2^x(2^x - 1)$. Pro x blízké $-\infty$ je 2^x téměř nula, proto $2^x - 1 < 0$. Máme tedy $2^x(2^x - 1) < 0$ a

$$\lim_{x\to-\infty}\bigl(f(x)\bigr) \overset{\frac{1}{0^-}}{=\!=} -\infty.$$

Při řešení limit v mínus nekonečnu se občas vyplatí převést je substitucí na limitu v nekonečnu. Pomůže to i zde?

$$\lim_{x\to-\infty}\bigl(f(x)\bigr) = \left|\begin{array}{c} y=-x \\ x=-y \\ x\to-\infty \implies y\to\infty \end{array}\right| = \lim_{y\to\infty}\Bigl(\frac{3^{-y}+1}{4^{-y}-2^{-y}}\Bigr)$$

$$= \lim_{y\to\infty}\Bigl(2^y\frac{\frac{1}{3^y}+1}{\frac{1}{2^y}-1}\Bigr) = \Bigl\langle\!\Bigl\langle \infty\frac{\frac{1}{\infty}+1}{\frac{1}{\infty}-1} = \infty\frac{0+1}{0-1}\Bigr\rangle\!\Bigr\rangle = -\infty.$$

Bylo to tak snažší? Asi ne, ale alespoň jsme si to protrénovali.

5. Odmocninu je lepší přepsat na $(\cos(x) + x + 2)^{1/x}$. Nejprve dosadíme **nekonečno**, ať vidíme, jaký typ limity máme.

$$\lim_{x\to\infty}\bigl(f(x)\bigr) = \Bigl\langle\!\Bigl\langle (\cos(\infty)+\infty+2)^{1/\infty}\Bigr\rangle\!\Bigr\rangle.$$

Protože kosinus nemá v nekonečnu limitu, je zde možnost, že limita neexistuje. Je ale omezený a přičítáme nekonečno, což dá dohromady nekonečno (pravidlo "omez+$\infty = \infty$"). Limita je tedy typu ∞^0, což je neurčitá mocnina. První krok je převést ji pomocí triku "e na logaritmus":

$$\lim_{x\to\infty}\bigl(f(x)\bigr) = \lim_{x\to\infty}\Bigl(e^{\frac{\ln(\cos(x)+x+2)}{x}}\Bigr) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(\cos(x)+x+2)}{x}\right)} = \Bigl\langle\!\Bigl\langle \frac{\ln(\infty)}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}\Bigr\rangle\!\Bigr\rangle.$$

Tento typ neurčitého výrazu se většinou řeší l'Hospitalovým pravidlem. Protože je to nuda pořád opisovat e, podíváme se jen na limitu:

$$\lim_{x\to\infty}\Bigl(\frac{\ln(\cos(x)+x+2)}{x}\Bigr) \underset{\text{l'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\Bigl(\frac{[\ln(\cos(x)+x+2)]'}{[x]'}\Bigr) = \lim_{x\to\infty}\Bigl(\frac{-\sin(x)+1}{\cos(x)+x+2}\Bigr) = 0.$$

Jak se došlo k tomu, že limita onoho podílu je nula? Výraz je typu "omezená/∞". Teď nesmíme zapomenout dosadit zpět do exponenciály.

$$\lim_{x\to\infty}\bigl(f(x)\bigr) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(\cos(x)+x+2)}{x}\right)} = e^0 = 1.$$

Poznámka: Pokud má někdo nedůvěru k pravidlům "omezená+∞" a "omezená/∞" či pokud jste je oficiálně neprobrali, je možno ony výrazy přinutit jít na správné místo pomocí vět o srovnání. Pro $x > 0$ máme

$$\cos(x) + x + 2 \ge -1 + x + 2 = x + 1 \to \infty$$

$$\text{a}\quad \Bigl|\frac{1-\sin(x)}{\cos(x)+x+2}\Bigr| \le \frac{1+|\sin(x)|}{-|\cos(x)|+x+2} \le \frac{2}{x+1} \to 0.$$

Teď zkusíme dosadit **nulu**, zase je lepší převést obecnou mocninu na exponenciálu logaritmu.

$$\lim_{x\to0}\bigl(f(x)\bigr) = e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\ln(\cos(x)+x+2)}{x}\right)} = \Bigl\langle\!\Bigl\langle \frac{\ln(3)}{0}\Bigr\rangle\!\Bigr\rangle.$$

Tento výraz je neurčitý a řeší se rozborem nuly. Je možné, aby byla jednostranná? Nejjednodušší způsob bývá spočítat jednostranné limity, je zde také nutno si uvědomit, že $\ln(3) > 0$.

$$\lim_{x\to0^+}\bigl(f(x)\bigr) = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(\cos(x)+x+2)}{x}\right)} = \Bigl\langle\!\Bigl\langle \frac{\ln(3)}{0^+} = \infty\Bigr\rangle\!\Bigr\rangle \overset{e^{\infty}}{=\!=} \infty,$$

$$\lim_{x\to0^-}\bigl(f(x)\bigr) = e^{\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{\ln(\cos(x)+x+2)}{x}\right)} = \Bigl\langle\!\Bigl\langle \frac{\ln(3)}{0^-} = -\infty\Bigr\rangle\!\Bigr\rangle \overset{e^{-\infty}}{=\!=} 0.$$

Protože jsou jednostranné limity různé, daná limita neexistuje.

6. Začneme jako obvykle dosazením.

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{e^x-ep}{x-p^2}\Big)=\left\langle\!\!\left\langle \tfrac{e-ep}{1-p^2}=\tfrac{(1-p)e}{1-p^2}\right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Jakého typu je tato limita? Vidíme, že to závisí na hodnotě p. Jestliže $p^2\neq 1$, pak ve jmenovateli není nula a můžeme limitu spočítat dosazením, ten výraz výše je pak vlastně výsledek. (Aby to vypadalo lépe, tak výraz ve jmenovateli rozložíme na lineární faktory, lze pak zkrátit).
Problémové hodnoty jsou $p=\pm 1$. Když je $p=1$, dostaneme v limitě po dosazení typ $\frac{0}{0}$, který standardně řešíme l'Hospitalovým pravidlem.

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{e^x-ep}{x-p^2}\Big)\overset{p=1}{=\!=}\lim_{x\to 1}\Big(\frac{e^x-e}{x-1}\Big)\underset{\text{l'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}}\lim_{x\to 1}\Big(\frac{e^x}{1}\Big)=e.$$

Pro hodnotu $p=-1$ dostáváme v limitě po dosazení typ $\frac{a}{0}$, kde v tomto případě $a=2e>0$. Jsme tedy v situaci, kdy máme rozebrat znaménko nuly. To se nejlépe dělá přes jednostranné limity. Pro $p=-1$ tedy dostaneme

$$\lim_{x\to 1^+}\Big(\frac{e^x+e}{x-1}\Big)\overset{\frac{2e}{0^+}}{=\!=}\infty,\qquad \lim_{x\to 1^-}\Big(\frac{e^x+e}{x-1}\Big)\overset{\frac{2e}{0^-}}{=\!=}-\infty.$$

Protože se jednostranné limity neshodují, oboustranná limita v 1 neexistuje. Závěr:

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{e^x-ep}{x-p^2}\Big)\begin{cases} =\frac{e}{1+p}, & p\neq\pm 1;\\ =e, & p=1;\\ \text{neex.}, & p=-1.\end{cases}$$

7. Nejprve jako obvykle dosadíme.

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{x-a^2}{\ln(x)}\Big)=\left\langle\!\!\left\langle \tfrac{1-a^2}{0}\right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Pokud bude $1-a^2\neq 0$, pak limita určitě diverguje. Jediná šance na konvergenci tedy je, aby byl čitatel také nulový, tedy $a=\pm 1$. Pak je tam neurčitý podíl, který může (ale nemusí) konvergovat.

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{x-a^2}{\ln(x)}\Big)\overset{a=\pm 1}{=\!=\!=}\lim_{x\to 1}\Big(\frac{x-1}{\ln(x)}\Big)\underset{\text{l'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}}\lim_{x\to 1}(x)=1.$$

Limita konverguje pro $a=\pm 1$.

8. Definiční obor funkce je dán jmenovatelem, nesmí být nulový. To se stane pro $x=0$, proto máme $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Otázka má tedy smysl, protože vidíme, že 0 a nekonečno jsou rozumní kandidáti na asymptotu, může být svislá v 0 a vodorovná či šikmá v nekonečnu.
Začneme **nulou**, stačí se dívat na jednostranné limity. Pro $x\to 0^+$ je $x>0$, tedy $e^x>1$ a

$$\lim_{x\to 0^+}\big(f(x)\big)\overset{\frac{1}{0^+}}{=\!=}\infty.$$

Máme tedy svislou asymptotu v 0 a není nutno dělat druhou jednostrannou limitu, ale jen pro zajímavost to zkusíme. Pak $x\to 0^-$, tedy $e^x<1$ a

$$\lim_{x\to 0^-}\big(f(x)\big)\overset{\frac{1}{0^-}}{=\!=}-\infty.$$

I tento výsledek by sám o sobě vedl na svislou asymptotu.

Teď se podíváme, co funkce dělá v **nekonečnu**.

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)\big)\underset{\text{l'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}}\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{1}{\ln(2)2^x}\Big)=0.$$

Máme tedy v nekonečnu vodorovnou asymptotu o rovnici $y = 0$.

Poznámka: Pro úplnost prozkoumáme jako bonus asymptotu v **mínus nekonečnu**.

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)\big) = \left\langle\!\!\left\langle \tfrac{-\infty}{e^{-\infty}-1} = \tfrac{-\infty}{0-1} \right\rangle\!\!\right\rangle = \infty.$$

Vodorovná asymptota tam tedy není, ale možná šikmá. Zkusíme najít A.

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{f(x)}{x}\Big) = \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x+1}{x(2^x-1)}\Big) = \left\langle\!\!\left\langle \tfrac{\infty}{-\infty(2^{-\infty}-1)} = \tfrac{\infty}{-\infty(0-1)} = -\tfrac{\infty}{\infty} \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Tohle volá po l'Hospitalovi,

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{f(x)}{x}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{[x+1]'}{[x(2^x-1)]'}\Big)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{1}{x\ln(2)\,2^x + (2^x-1)}\Big) = \left\langle\!\!\left\langle \tfrac{1}{-\infty 2^{-\infty}+(2^{-\infty}-1)} = \tfrac{1}{-\infty\cdot 0+(0-1)} \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Ve jmenovateli jsme dostali neurčitý výraz, což je docela nepříjemné. Jedna možnost je spočítat si někde bokem, kolik vyjde $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(x\,2^x\big)$. Neurčitý součin se počítá převodem na podíl a následně l'Hospitalem:

$$\lim_{x\to-\infty}\big(x2^x\big) = \lim_{x\to-\infty}\big(\tfrac{x}{2^{-x}}\big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to-\infty}\big(\tfrac{1}{-\ln(2)\,2^{-x}}\big) \overset{\frac{1}{-\infty}}{=\!=} 0.$$

Vrátíme se tam, kde jsme toto potřebovali vědět:

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{f(x)}{x}\Big) = \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{1}{x\ln(2)\,2^x + (2^x-1)}\Big) \overset{\frac{1}{0+(0-1)}}{=\!=} -1 = A.$$

Mimochodem, existuje mnohem rychlejší metoda, jak najít tuto limitu. Zkušenost říká, že aplikovat l'Hospitala na složitější výrazy nebývá dobrý nápad. Pokud je možné oddělit "pěknou" část limity mimo, vyplácí se to. Při pohledu na limitu vidíme, že tam je zlomek $\frac{x+1}{x}$, který umíme spočítat víceméně z hlavy, protože je to podíl polynomů a vyhrávají vedoucí členy, jde tedy k 1. Dokáže se to u tohoto zlomku snadno, stačí jej prostě vydělit. Proto

$$A = \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{f(x)}{x}\Big) = \lim_{x\to-\infty}\big(1+\tfrac{1}{x}\big)\cdot\lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{1}{2^x-1}\Big) = \left\langle\!\!\left\langle \big(1+\tfrac{1}{-\infty}\big)\tfrac{1}{2^{-\infty}-1} = (1+0)\cdot\tfrac{1}{0-1} \right\rangle\!\!\right\rangle = -1.$$

Trochu lepší, co?

Každopádně je tedy možnost šikmé asymptoty se směrnicí $A = -1$. Teď se rozhodne:

$$B = \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(-1)x\big) = \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x+1}{2^x-1}+x\Big) = \left\langle\!\!\left\langle \infty-\infty \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Tradičně dostáváme neurčitý rozdíl, zase jediná šance je ve sloučení členů a snad se něco stane.

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)+x\big) = \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x+1+x(2^x-1)}{2^x-1}\Big) = \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x\,2^x+1}{2^x-1}\Big) = \left\langle\!\!\left\langle \tfrac{-\infty\cdot 2^{-\infty}+1}{2^{-\infty}-1} = \tfrac{-\infty\cdot 0+1}{0-1} \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Máme stejný problém jako před chvílí, takže už víme, jak ten neurčitý součin dopadne.

$$B = \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)+x\big) = \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x\,2^x+1}{2^x-1}\Big) \overset{\frac{0+1}{0-1}}{=\!=} -1.$$

V nekonečnu je tedy šikmá asymptota o rovnici $y = -x-1$.

9. Má otázka vůbec smysl? Jinými slovy, je funkce definována na nějakém okolí nekonečna? Problém je v logaritmu, ten existuje pro x splňující $2e^x + x > 0$, což neumíme explicitně vyřešit, takže je dobře, že se nás nezeptali na definiční obor. Nám stačí si všimnout, že pro kladná x to určitě platí, takže f je definovaná na kladné poloose a má smysl se zeptat, co se děje v nekonečnu.

Nejprve se podíváme na limitu funkce, protože to hodně napoví.

$$\lim_{x\to\infty}\big(\ln(2e^x+x)\big) = \left\langle\!\!\left\langle \ln(2e^{\infty}+\infty) = \ln(\infty) \right\rangle\!\!\right\rangle = \infty.$$

Takže rozhodně nebude vodorovná asymptota, ale je šance na asymptotu šikmou. Abychom to rozhodli, nejprve se podíváme, jestli by mohla být směrnice.

$$A = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{f(x)}{x}\Big) = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{\ln(2e^x+x)}{x}\Big) = \Big\langle\!\!\Big\langle \tfrac{\infty}{\infty} \Big\rangle\!\!\Big\rangle.$$

Tohle volá po l'Hospitalovi.

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{\ln(2e^x+x)}{x}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{[\ln(2e^x+x)]'}{[x]'}\Big) = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2e^x+1}{2e^x+x}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{[2e^x+1]'}{[2e^x+x]'}\Big)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2e^x}{2e^x+1}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2e^x}{2e^x}\Big) = 1.$$

Alternativa: Po prvním použití l'Hospitala jsme dostali podíl s mocninami, což rádi řešíme vytknutím dominantních členů. Tady je stejný dominantní člen v čitateli i jmenovateli, jmenovitě ta exponenciála, takže ji můžeme pokrátit.

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{\ln(2e^x+x)}{x}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2e^x+1}{2e^x+x}\Big) = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2+\frac{1}{e^x}}{2+\frac{x}{e^x}}\Big) = \Big\langle\!\!\Big\langle \tfrac{2+1/\infty}{2+0} \Big\rangle\!\!\Big\rangle = 1.$$

Je to kratší, ale jen proto, že jsme použili tvrzení, že $\frac{x}{e^x}\to 0$ v nekonečnu (víme, že exponenciála přebije mocniny). Pokud by to chtěl někdo (třeba zkoušející) odůvodnit, aby tak bylo řešení kompletní, předvedli bychom na tom dalšího l'Hospitala.

Každopádně máme $\lim\limits_{x\to\infty}\big(\frac{f(x)}{x}\big) = 1 = A$, limita konvergovala, takže je pořád možné, že je šikmá asymptota, a pokud je, tak má směrnici $A = 1$. S konečnou platností se to rozhodne, když se pokusíme spočítat B.

$$B = \lim_{x\to\infty}\big(f(x) - Ax\big) = \lim_{x\to\infty}\big(\ln(2e^x+x) - 1\cdot x\big) = \Big\langle\!\!\Big\langle \infty - \infty \Big\rangle\!\!\Big\rangle.$$

Neurčitý rozdíl je nepříjemný v tom, že na něj nemáme relativně spolehlivý standardní postup. Obvykle se snažíme nějak ty dva členy algebraicky spojit, abychom pokud možno pokrátili. Zde to půjde, pokud i druhý člen bude logaritmus něčeho, ale to umíme zařídit.

$$\lim_{x\to\infty}\big(\ln(2e^x+x) - x\big) = \lim_{x\to\infty}\big(\ln(2e^x+x) - \ln(e^x)\big) = \lim_{x\to\infty}\Big(\ln\Big(\frac{2e^x+x}{e^x}\Big)\Big)$$

$$= \ln\Big[\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2e^x+x}{e^x}\Big)\Big] = \Big\langle\!\!\Big\langle \tfrac{\infty}{\infty} \Big\rangle\!\!\Big\rangle.$$

Podobný problém jako předtím, podobný postup, vykrátíme tu exponenciálu.

$$\lim_{x\to\infty}\big(\ln(2e^x+x) - x\big) = \ln\Big[\lim_{x\to\infty}\Big(2+\frac{x}{e^x}\Big)\Big] \overset{2+0}{=\!=} \ln(2) = B.$$

I tato limita konvergovala, takže máme šikmou asymptotu v nekonečnu a má rovnici $y = x + \ln(2)$.

10. Spojitost v bodě se dělá porovnáním hodnoty funkce a jednostranných limit. Začneme limitou zprava: Když $x\to 1^+$, pak je $x > 1$, proto je f dáno tím vzorcem se zlomkem a odmocninami.

$$\lim_{x\to 1^+}\big(f(x)\big) = \lim_{x\to 1^+}\Big(\frac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}\Big) = \Big\langle\!\!\Big\langle \tfrac{0}{0} \Big\rangle\!\!\Big\rangle.$$

Dostali jsme neurčitý podíl, což se standardně řeší l'Hospitalem, ale u výrazů s rozdílem odmocnin často dáváme přednost alternativní metodě, rozšíření zlomku přidruženým výrazem.

$$\lim_{x\to 1^+}\big(f(x)\big) = \lim_{x\to 1^+}\Big(\frac{(2x+2)-2^2}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)}\Big) = \lim_{x\to 1^+}\Big(\frac{2x-2}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)}\Big)$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\Big(\frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)}\Big) = \lim_{x\to 1^+}\Big(\frac{2}{\sqrt{2x+2}+2}\Big) = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}.$$

Teď limita zleva: Když $x\to 1^-$, je $x < 1$ a tudíž pro f použijeme ten vzorec s mocninou.

$$\lim_{x\to 1^-}\big(f(x)\big) = \lim_{x\to 1^-}\big(\arccos(x)e^{1/\ln(x)}\big) = \Big\langle\!\!\Big\langle \arccos(1)\cdot e^{1/\ln(1^-)} = 0\cdot e^{1/0^-} = 0\cdot e^{-\infty} \Big\rangle\!\!\Big\rangle = 0\cdot 0 = 0.$$

Máme tedy $f(1^+)=\frac{1}{2}$, $f(1^-)=0$, jinými slovy, jednostranné limity konvergují, ale nerovnají se. Funkce je proto nespojitá v 1 a jde o skokovou nespojitost. Nebylo ani nutné porovnávat s hodnotou $f(1)=0$, to už by na této klasifikaci nic nezměnilo, nicméně vidíme, že $f(1^-)=f(1)$, funkce je tedy spojitá v 1 zleva.

Poznámka: Ne každému se ta algebra u limity s odmocninami líbí a zrovna zde by použití l'Hospitalova pravidla nebylo špatnou volbou. Jsou ale příklady, kde by l'Hospital byl příšerný, zatímco trik s odmocninou je pouze únavný, a tedy se vyplatí. Zkuste si pro srovnání zkusit spočítat oběma metodami následující dva příklady, my tu naznačíme cestu algebraickou, vám přenecháme oblíbeného l'Hospitala.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\Bigl(\frac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{5x-1}}{(x-1)^2}\Bigr)&=\ldots=\lim_{x\to 1}\Bigl(\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{5x-1}\,)}\Bigr)\\&=\lim_{x\to 1}\Bigl(\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{5x-1}\,)}\Bigr)=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Druhý příklad:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\Bigl(\frac{\sqrt{x^4+4x^3}-\sqrt{x^4+1}}{x-13}\Bigr)=\ldots=\lim_{x\to\infty}\Bigl(\frac{4x^3-1}{(x-13)(\sqrt{x^4+4x^3}+\sqrt{x^4+1}\,)}\Bigr)\\&=\lim_{x\to\infty}\Bigl(\frac{x^3(4-\frac{1}{x^3})}{x(1-\frac{13}{x})\Bigl(x^2\sqrt{1+\frac{4}{x}}+x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\Bigr)}\Bigr)=\lim_{x\to\infty}\Bigl(\frac{4-\frac{1}{x^3}}{(1-\frac{13}{x})\Bigl(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\Bigr)}\Bigr)\\&=\Bigl\langle\!\Bigl\langle\frac{4-0}{(1-0)(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}\,)}\Bigr\rangle\!\Bigr\rangle=2.\end{aligned}$$

Použili jsme postup vysvětlený výše, při práci s mocninami se vyplácí vytýkat tu nejvyšší v čitateli i jmenovateli. Pokud jsou tam komplikovanější složky, třeba odmocniny, vyplatí se začít s nimi, u té první jsme použili

$$\sqrt{x^4+4x^3}=\sqrt{x^4\Bigl(1+\frac{4}{x}\Bigr)}=\sqrt{x^4}\sqrt{1+\frac{4}{x}}=x^2\sqrt{1+\frac{4}{x}}.$$

Tím je pak každá odmocnina reprezentována jistou mocninou a ty je možno porovnávat navzájem při výběru dominanty. Protože nakonec bylo v čitateli i jmenovateli celkem x^3, tak jsme nevytýkali, ale rovnou zkrátili.