

MA1: Řešené příklady—funkce: derivace

1. Najděte derivaci funkce $f(x) = \frac{3x^2 - \sin(2x)}{x e^x}$.
2. Najděte první derivaci funkce $f(x) = \left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3 - 4}\right)^{\arccos(x)}$ v bodě $a = 0$.
3. Najděte derivaci funkce $f(x) = \ln(x^a \arcsin(x))$, kde a je parametr.
4. Najděte rovnici tečny/normály ke grafu funkce $f(x) = (e^x + 1)^{\cos(x)}$ v bodě $a = 0$.
5. Najděte T_3 , Taylorův polynom stupně 3, se středem v bodě $a = 1$ pro funkci $f(x) = x^2 e^{1-x}$.
6. Použijte vhodný Taylorův polynom stupně 2 k odhadu hodnoty $\sin(3)$.

Najděte maximální intervaly monotonie a lokální extrémů pro následující funkce:

7. $f(x) = (x - 1)e^{1/(x-1)}$; 8. $f(x) = \ln(x^2 - 2|x| + 4)$;

9. $f(x) = x \ln(|x|)$; 10. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$.

U příkladu 9. jako bonus uděláme celý průběh funkce.

11. Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = e^{x^3 + 3ax^2}$, kde a je parametr.

12. Najděte globální extrémů funkce $f(x) = |x - 3| \cdot (x + 1)$ na intervalu $\langle 0, 4 \rangle$.

Řešení:

Poznámka o zápisu: Do výpočtu často vkládám vysvětlující poznámky mezi $\langle\langle$ závorky $\rangle\rangle$, jde o mé soukromé značení, abych nemusel výpočty přerušovat; většinu toho bych při normálním psaní řešení neuváděl. Nicméně hlavně u zkoušky bývá dobré řešení komentovat, aby zkoušející viděl, že jsem výsledek nezískal jinak (třeba osvětlením shůry). Jmenovitě, u limit je často používanou možností přidávat odkazy na známé věci nad (či pod) rovnítko, jde zejména o indikaci použití l'Hospitalova pravidla či kritické mezikroky. U integrálů bývá tradiční indikovat substituci či per partes pomocí "matice", zde jsem do ní vpisoval jako pomoc studentovi i případný převod mezi při substituci, to se normálně nedělá, protože zda člověk meze převedl je vidět. U derivací je většinou hned vidět, která pravidla student použil, takže se nekomentuje.

Pro studenta však bývá těžké odhadnout, co je vyučující ochoten akceptovat jako fakt a co chce dovysvětlit. Zde vysvětluji více, než je třeba, a dělám ve výpočtu víc kroků; myslím, že tu víceméně "správnou" míru komentování a detailů student najde v Příkladech k procvičování.

1. Derivuje se od poslední operace, kterou je zde dělení. Nejprve tedy použijeme podílové pravidlo.

$$f'(x) = \frac{[3x^2 - \sin(2x)]' \cdot [x e^x] - [3x^2 - \sin(2x)] \cdot [x e^x]'}{[x e^x]^2}$$

Teď jsou tam dvě derivace. V té první je poslední operací odčítání, takže použijeme linearitu. V té druhé je poslední operací násobení, takže použijeme součinnové pravidlo.

$$f'(x) = \frac{([3x^2]' - [\sin(2x)]')x e^x - (3x^2 - \sin(2x)) \cdot ([x]'e^x + x[e^x]')}{x^2 e^{2x}}$$

Teď tam máme derivace čtyři. Odleva: Díky linearitě je možno "vytáhnout" z derivace násobící trojku, zbyde tabulková derivace z x^2 . Další člen je složená funkce a jako poslední se dělá sinus, tím tedy musíme začít. Zderivujeme jej, $[\sin(y)]' = \cos(y)$, toto pak podle pravidla pro derivaci složené funkce vynásobíme derivací vnitřní funkce $2x$, kterou také dosadíme za y . Zbývající dvě derivace jsou tabulkové.

$$f'(x) = \frac{(3 \cdot [x^2]' - \cos(2x) \cdot [2x]')x e^x - (3x^2 - \sin(2x)) \cdot (1 \cdot e^x + x e^x)'}{x^2 e^{2x}}$$

Zbývá dorazit ty dvě tabulkové derivace, výsledek upravit a určit obor existence této derivace, což je snadné.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3 \cdot 2x - \cos(2x) \cdot 2)x e^x - (3x^2 - \sin(2x)) \cdot (e^x + x e^x)}{x^2 e^{2x}} \\ &= \frac{(6x - 2 \cos(2x))x e^x - (3x^2 - \sin(2x)) \cdot e^x(1+x)}{x^2 e^{2x}} \\ &= \frac{3x^2 - 3x^3 + (x+1)\sin(2x) - 2x \cos(2x)}{x^2 e^x}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

2. Má derivace smysl? Jinými slovy, je 0 vnitřní bod definičního oboru? Abychom jej našli, musíme nejprve přepsat tuto danou mocninu pomocí triku “ e na logaritmus”:

$$f(x) = e^{\arccos(x) \ln\left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right)}.$$

Definiční obor vypadá dost nepříjemně a na písemce bychom jej rozhodně nedělali, nás zajímá jen okolí nuly. Pokud je x číslo blízké nule, pak πe^x je přibližně π , proto je $\cos(\pi e^x) \sim -1$. Ve jmenovateli zase (pro hodně malá x) dostaneme přibližně -4 , takže zlomek je zhruba $\frac{1}{4}$. Přesná hodnota nás nezajímá, podstatné je, že na nějakém okolí bodu 0 je zlomek kladný, proto logaritmus existuje a funkce je definovaná.

Budeme tedy derivovat, tady zase použijeme převod na exponenciálu. V každém kroku určíme, jaká operace se dělá poslední, na ni aplikujeme příslušné pravidlo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[e^{\arccos(x) \ln\left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right)} \right]' = \langle\langle \text{složení s } e^y, [e^y]' = e^y \rangle\rangle \\ &= e^{\arccos(x) \ln\left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right)} \cdot \left[\arccos(x) \ln\left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right) \right]' = \langle\langle \text{součin} \rangle\rangle \\ &= \left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right)^{\arccos(x)} \left([\arccos(x)]' \ln\left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right) + \arccos(x) \left[\ln\left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right) \right]' \right) \\ &= \langle\langle \text{složení s } \ln(y), [\ln(y)]' = \frac{1}{y} \rangle\rangle \\ &= \left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right)^{\arccos(x)} \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right) + \arccos(x) \frac{1}{\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}} \left[\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4} \right]' \right) = \langle\langle \text{podíl} \rangle\rangle \\ &= \left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right)^{\arccos(x)} \times \\ &\quad \times \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right) + \arccos(x) \frac{2x^3-4}{\cos(\pi e^x)} \cdot \frac{[\cos(\pi e^x)]'(2x^3-4) - \cos(\pi e^x)[2x^3-4]'}{(2x^3-4)^2} \right) \\ &= \langle\langle \text{složení s } \cos(y), [\cos(y)]' = -\sin(y) \rangle\rangle \\ &= \left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right)^{\arccos(x)} \times \\ &\quad \times \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right) + \arccos(x) \frac{2x^3-4}{\cos(\pi e^x)} \cdot \frac{-\sin(\pi e^x)[\pi e^x]'(2x^3-4) - \cos(\pi e^x)6x^2}{(2x^3-4)^2} \right) \\ &= \left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right)^{\arccos(x)} \times \\ &\quad \times \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4}\right) - \arccos(x) \frac{\sin(\pi e^x)\pi e^x(2x^3-4) + \cos(\pi e^x)6x^2}{(\cos(\pi e^x))(2x^3-4)} \right). \end{aligned}$$

Teď dosadíme bod:

$$f'(0) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\pi/2} \cdot (\ln(4) + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{0}{-4}) = \ln(4) \left(\frac{1}{4}\right)^{\pi/2}.$$

Poznámka: Jaký je vlastně definiční obor? Z \arccos máme $x \in \langle -1, 1 \rangle$. V logaritmu vidíme dvě

podmínky, $x^3 \neq 2$ a $\frac{\cos(\pi e^x)}{2x^3-4} > 0$. Druhou podmínku nejlépe vyřešíme rozborem znamének, začneme jmenovatelem. Ten je kladný pro $x > \sqrt[3]{2}$, ale takováto x neleží v definičním oboru arccosinu, takže tento případ můžeme vyloučit. Když se omezíme na ten interval $x \in \langle -1, 1 \rangle$, pak máme $x < \sqrt[3]{2}$, takže jmenovatel zlomku je záporný a nás zajímá, kdy je $\cos(\pi e^x) < 0$. To znamená, že $\pi e^x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$. Když to přepíšeme jako nerovnosti, můžeme řešit pro x :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \pi e^x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ \ln(\frac{1}{2} + 2k) < x < \ln(\frac{3}{2} + 2k) \end{aligned}$$

Zde mohou být k libovolná celá čísla splňující $\frac{3}{2} + 2k > 0$, tj. vlastně přirozená čísla či nula. Toto řešení ovšem platí jen pro $x < \sqrt[3]{2}$, takže potřebujeme zjistit, pro která k leží intervaly $(\ln(\frac{1}{2} + 2k), \ln(\frac{3}{2} + 2k))$ v rozmezí od $\sqrt[3]{2}$ doleva. Další podmínka je, že $x \in \langle -1, 1 \rangle$, čili potřebujeme zjistit, které z těchto intervalů mají neprázdný průnik s $\langle -1, 1 \rangle$. Trocha ťukání do kalkuliho mašiny záhy vyjeví, že pro $k = 0$ dostaneme přibližně $(-0.7, 0.4)$ a pro $k = 1$ máme $(0.9, 1.3)$, další k už jsou mimo. Definiční obor tedy je

$$D(f) = (\ln(\frac{1}{2}), \ln(\frac{3}{2})) \cup (\ln(\frac{5}{2}), 1).$$

Je to docela hnus, naštěstí se to po nás nechtělo, nicméně je možná zajímavé vidět, jak se to dělá.

3. Jelikož je a parametr, můžeme si místo něj představit nějakou konstantu a rozmyslet si, jak by se taková funkce derivovala, řekněme $\ln(x^a \arcsin(x))$. Stejný postup pak bude fungovat na danou funkci. Takže jdeme na to, poslední prováděná operace je logaritmus, začneme tedy jeho zderivováním ($[\ln(y)]' = \frac{1}{y}$), a protože je složen s vnitřní funkcí, použijeme příslušné pravidlo. Dostaneme se tak k derivování vnitřní funkce, kde teď použijeme součinnové pravidlo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^a \arcsin(x)} [x^a \arcsin(x)]' = \frac{1}{x^a \arcsin(x)} ([x^a]' \arcsin(x) + x^a [\arcsin(x)]') \\ &= \frac{1}{x^a \arcsin(x)} \left(ax^{a-1} \arcsin(x) + x^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right), \quad x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Jak jsme našli definiční obor? Nejprve pro funkci f : Arkus sinus má definiční obor $\langle -1, 1 \rangle$, u mocniny x^a zase neznáme, jakého typu je exponent, tudíž musíme vyžadovat $x > 0$. Na výsledné množině $(0, 1)$ je pak argument logaritmu kladný, tudíž vyhovuje i tomu logaritmu. Nakonec ověříme, že i výraz nalezený po zderivování s tím nemá (kromě krajního bodu $x = 1$) problém.

4. Je zadaný bod v definičním oboru? To nejlépe uvidíme převodem dané obecné mociny na kanonický tvar “ e na logaritmus”:

$$f(x) = e^{\cos(x) \ln(e^x + 1)}.$$

Jediné omezení je ten logaritmus, který vyžaduje kladný argument, ale to má, protože exponenciála je vždy kladná, tedy $e^x + 1 > 1 > 0$. Máme $D(f) = \mathbb{R}$ a můžeme v klidu pracovat okolo nuly.

K získání tečny a normály potřebujeme začít derivací, teď se hodí ten převod na exponenciálu:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[e^{\cos(x) \ln(e^x + 1)} \right]' = \left\langle \left\langle \text{složení s } e^y, [e^y]' = e^y \right\rangle \right\rangle \\ &= e^{\cos(x) \ln(e^x + 1)} \cdot [\cos(x) \ln(e^x + 1)]' = \left\langle \left\langle \text{součin} \right\rangle \right\rangle \\ &= (e^x + 1)^{\cos(x)} \cdot (-\sin(x) \ln(e^x + 1) + \cos(x) [\ln(e^x + 1)]') = \left\langle \left\langle \text{složení s } \ln(y), [\ln(y)]' = \frac{1}{y} \right\rangle \right\rangle \\ &= (e^x + 1)^{\cos(x)} \cdot \left(-\sin(x) \ln(e^x + 1) + \cos(x) \frac{1}{e^x + 1} [e^x + 1]' \right) \\ &= (e^x + 1)^{\cos(x)} \cdot \left(-\sin(x) \ln(e^x + 1) + \cos(x) \frac{e^x}{e^x + 1} \right). \end{aligned}$$

Směrnice **tečny** v bodě 0 je dána $k_T = f'(0) = 2^1(0 + \frac{1}{2}) = 1$, potřebujeme také $f(0) = 2$. Děláme

tedy přímku skrz bod $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ se směrnicí $k_T = 1$, což je snadné:

$$y - y_0 = k_T(x - x_0) \implies y - 2 = x - 0 \implies y = x + 2.$$

Normála prochází stejným bodem, ale má směrnici $k_N = \frac{-1}{k_T} = -1$, takže dostaneme $y - 2 = -(x - 0)$, tj. $y = 2 - x$.

5. Nejprve musíme spočítat derivace až po řád 3, pak do nich dosadit střed řady $a = 1$.

$$\begin{array}{l|l} f(x) = x^2 e^{1-x} & f(1) = 1 \\ f'(x) = (-x^2 + 2x) e^{1-x} & f'(1) = 1 \\ f''(x) = (x^2 - 4x + 2) e^{1-x} & f''(1) = -1 \\ f'''(x) = (-x^2 + 6x - 6) e^{1-x} & f'''(1) = -1 \end{array}$$

Pomocí těchto čísel a faktoriálů vyrobíme koeficienty hledaného polynomu:

$$T_3(x) = 1 + 1 \cdot (x - 1) + \frac{-1}{2!}(x - 1)^2 + \frac{-1}{3!}(x - 1)^3 = 1 + (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{6}(x - 1)^3.$$

6. Uvažujeme funkci $f(x) = \sin(x)$, kterou chceme aproximovat v bodě $x = 3$. Abychom dostali co nejlepší aproximaci, měli bychom zvolit Taylorův polynom se středem blízkým číslu 3, a abychom jej uměli spočítat, mělo by to být "dobře" číslo z hlediska sinu. Nabízí se $\pi \sim 3.14159\dots$

Najdeme tedy Taylorův polynom 2. stupně funkce $\sin(x)$ se středem $a = \pi$. Nejprve spočítáme první dvě derivace, pak do nich dosadíme ten střed.

$$\begin{array}{l|l} f(x) = \sin(x) & f(\pi) = 0 \\ f'(x) = \cos(x) & f'(\pi) = -1 \\ f''(x) = -\sin(x) & f''(\pi) = 0 \end{array}$$

Příslušný Taylorák je tedy

$$T_2(x) = 0 - (x - \pi) + \frac{0}{2!} \cdot (x - \pi)^2 = -(x - \pi).$$

Teď odhadneme: $\sin(3) \sim T_2(3) = -(3 - \pi) = \pi - 3 \quad (\sim 0.14159\dots)$.

Poznámka: My jsme jen doufali, že $\sin(3) \sim T_2(3)$. Jsou tato dvě čísla opravdu blízka? Když to zkusíme na kalkulačce, dostaneme $\sin(3) = 0.1411\dots$, takže chyba naší aproximace je asi 0.0005, jenže na to jsme použili kalkulačky, ale my ji nemáme, protože kdybychom ji měli, nemusíme Taylorovat. Umíme odhadnout chybu naší aproximace bez kalkulačky? K tomu nám poslouží Lagrangeův tvar zbytku. Ten říká, že chyba aproximace je

$$R_3(3) = \sin(3) - T_2(3) = \frac{f'''(c)}{3!}(3 - \pi)^3 = \frac{-\cos(c)}{3!}(3 - \pi)^3,$$

kde c je nějaké číslo z intervalu $\langle 3, \pi \rangle$. Protože jej neznáme (teorie nám řekne, že nějaké takové určité je, ale nepomůže jej identifikovat), odhadneme chybu shora. K tomu použijeme fakt, že kosinus je omezený jedničkou. Máme tedy

$$|R_3(3)| \leq \frac{|\cos(c)|}{6} |3 - \pi|^3 \leq \frac{1}{6}(\pi - 3)^3.$$

Jak velké je toto číslo? Přesné π neznáme, ale víme, že $\pi \leq 3.15$, můžeme tedy odhadnout $(\pi - 3)^3 \leq (0.15)^3 = 0.003375$ a tedy

$$|R_3(3)| \leq \frac{0.003375}{6} \sim 0.000563.$$

Teorie nám tedy říká, že když odhadneme $\sin(3)$ pomocí našeho Tayloráku, bude chyba menší než 0.0006, můžeme tedy psát $\sin(3) = 0.1416 \pm 0.0006$.

Mimochodem, absolutní velikost chyby je ve skutečnosti nepodstatná, určující je velikost chyby relativní k výsledku. Náš odhad chyby vztážený k výsledku dává $\frac{6}{1416} \sim 0.004$, tedy ani ne půl procenta, což je **dost** dobrá aproximace.

7. Nejprve určíme definiční obor, je jediná podmínka, zlobí ten zlomek. Máme tedy

$D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Začínáme s dvěma intervaly, teď se podíváme po kritických bodech, abychom viděli, jak je máme dále rozdělit na intervaly monotonie. Na to potřebujeme derivaci.

$$f'(x) = e^{1/(x-1)} \frac{x-2}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

Rovnice $e^{1/(x-1)} \frac{x-2}{x-1} = 0$ má řešení $x = 2$ (exponenciála není nikdy nula, takže je jediné), je to první kritický bod. Jsou body definičního oboru, kde derivace neexistuje? Nejsou, takže víc kritických bodů nepřibude.

Máme tedy tři potenciální intervaly monotonie a podíváme se na znaménka derivace (uzavřeme intervaly tam, kde spojitost umožňuje protažení monotonie do krajních bodů).

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$\langle 2, \infty$
$x - 2$	-	-	+
$x - 1$	-	+	+
$e^{1/(x-1)}$	+	+	+
$f'(x) :$	+	-	+
$f(x) :$	\nearrow	\searrow	\nearrow

Závěr: Daná funkce je rostoucí na $(-\infty, 1)$ a na $\langle 2, \infty$, klesající na $(1, 2)$. Lokální maximum není, lokální minimum $f(2) = e$.

8. Nejprve určíme, že $D(f) = \mathbb{R}$, neboť výrazy $x^2 + 2x + 4$ a $x^2 - 2x + 4$ jsou vždy kladné. Máme tedy jeden základní interval a v prvním kroku zjistíme, zda a kde jej rozdělíme na potenciální intervaly monotonie kritickými body. Na to potřebujeme derivaci, kterou z absolutní hodnoty nespočítáme, je tedy nutné se jí nejprve zbavit rozepsáním funkce.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 - 2x + 4), & x \geq 0; \\ \ln(x^2 + 2x + 4), & x < 0 \end{cases} \quad \text{nebo} \quad f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 - 2x + 4), & x > 0; \\ \ln(x^2 + 2x + 4), & x \leq 0. \end{cases}$$

Teď budeme derivovat, připomínáme, že derivace vzorcem platí jen na otevřených množinách, proto derivace prvního vzorce platí jen na $(0, \infty)$ a derivace druhého jen na $(-\infty, 0)$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-2}{x^2-2x+4}, & x > 0; \\ \frac{2x+2}{x^2+2x+4}, & x < 0. \end{cases}$$

Jak to vypadá s derivací v nule? Na to bychom měli prozkoumat jednostranné derivace (například pomocí definice), ale to je moc práce. My hledáme podezřelé body, takže když přihodíme jeden navíc, nic se nestane. Započítáme tedy $x = 0$ mezi podezřelé body; další body definičního oboru, kde derivace neexistuje, nejsou, takže tento typ kritických bodů je hotov.

Další kritické body získáme řešením $f'(x) = 0$. V oboru $x > 0$ to znamená řešit $2x - 2 = 0$, tedy $x = 1$. Protože $x = 1$ leží v oboru, kde jsme řešili ($x > 0$), je to platné řešení. Podobně pro $x < 0$ je derivace dána tou druhou formulou, řešíme $2x + 2 = 0$, dostaneme $x = -1$, které splňuje $x < 0$.

Máme tedy tři podezřelé body, $x = -1, 0, 1$, které rozdělí reálnou osu na čtyři intervaly, na každém z nich je funkce monotónní. Použijeme uzavřené intervaly tam, kde je f spojitá, protože spojitost umožňuje protáhnout monotonii do krajních bodů. Přesný druh monotonie se zjistí určením znaménka derivace tabulkovou metodou, připomínáme, že ty kvadratické polynomy jsou vždy kladné. Protože je derivace na různých oblastech dána různými vzorci, je nutné na jednotlivých oblastech zkoumat vždy ty správné výrazy. Doporučujeme ještě před vyplňováním znamének graficky vyznačit místa, kde nás znaménka nezajímají, protože dotyčný vzorec v dotyčném intervalu nemá s naší funkcí nic společného.

	$(-\infty, -1)$	$\langle -1, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 1, \infty \rangle$
$2x + 2 :$	-	+	////	////
$2x - 2 :$	////	////	-	+
$x^2 \pm 2x + 4 :$	+	+	+	+
$f'(x) :$	-	+	-	+
$f(x) :$	↘	↗	↘	↗

Nestává se, že by funkce měla stejnou tendenci na po sobě jdoucích intervalech, nemusíme tedy pátrat, zda jde něco spojit. Vidíme také, že se monotonie mění v nule, takže jsme nulu zahrnuli mezi kritické body oprávněně.

Závěr: Daná funkce je klesající na $(-\infty, -1)$ a na $\langle 0, 1 \rangle$, rostoucí na $\langle -1, 0 \rangle$ a na $\langle 1, \infty \rangle$. Z tvaru také vidíme, že máme lokální maximum $f(0) = \ln(4)$ a lokální minima $f(\pm 1) = \ln(3)$.

Poznámka: Kdybychom opravdu chtěli vědět najisto o derivaci v nule, mohli bychom si všimnout, že daná funkce je spojitá v nule a má kolem derivaci, jednostranné derivace v nule je tedy možné najít pomocí limity derivace:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (f'(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 4} \right) = \frac{1}{2},$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f'(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 4} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Jednostranné derivace tedy existují, ale nejsou si rovny, proto derivace v nule neexistuje.

9. Podmínkou existence je $|x| > 0$, máme tedy $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Začínáme s dvěma základními intervaly, uvidíme, jestli je nemusíme dále rozdělit, na to potřebujeme kritické body. Protože derivace absolutní hodnoty je trochu problém, začneme tím, že se jí zbavíme.

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x), & x > 0; \\ x \ln(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Oba vzorce definují f na otevřené množině a jiné body v definičním oboru nejsou, takže derivaci získáme bez komplikací pomocí vzorců.

$$f'(x) = \begin{cases} \ln(x) + 1, & x > 0; \\ \ln(-x) + 1, & x < 0. \end{cases}$$

Kritické body získáme řešením rovnice $f'(x) = 0$. Na oblasti dané $x > 0$ to znamená $\ln(x) = -1$, tj. $x = 1/e$, což je platné řešení, protože leží tam, kde jsme pracovali ($x > 0$). Podobně na oblasti $x < 0$ řešíme $\ln(-x) = -1$ a najdeme $x = -1/e$. Máme se také zeptat, zda nejsou body definičního oboru, kde derivace neexistuje: Nejsou. Ty dva body jsou tedy všechny kritické body a rozdělí ony dva intervaly definičního oboru na celkem čtyři, na každém je funkce monotonní. Na zjištění typu monotonie určíme znaménka derivace, zase protáhneme intervaly do uzavřených konců tam, kde to umožňuje spojitost. Dáme pozor na to, že oba výrazy se týkají derivace vždy jen někde.

	$(-\infty, -1/e)$	$\langle -1/e, 0 \rangle$	$(0, 1/e)$	$\langle 1/e, \infty \rangle$
$\ln(-x) + 1 :$	+	-	////	////
$\ln(x) + 1 :$	////	////	-	+
$f'(x) :$	+	-	-	+
$f(x) :$	↗	↘	↘	↗

Funkce je klesající na dvou po sobě jdoucích intervalech, takže se musíme zeptat, jestli náhodou není klesající na jednom velkém intervalu. Tyto dva ale nejdou spojit do jednoho intervalu, protože jsou rozděleny "dírou" v definičním oboru, je to tedy hotovo.

Závěr: Daná funkce je rostoucí na $(-\infty, -1/e)$ a na $\langle 1/e, \infty \rangle$ a klesající na $\langle -1/e, 0 \rangle$ a na $(0, 1/e)$. Lokální maximum $f(-1/e) = 1/e$, lokální minimum $f(1/e) = -1/e$.

Bonus: Zkusíme si udělat průběh funkce.

1) Definiční obor už jsme zjistili, $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Průsečíky s osami: Protože nejde dosadit 0 do f , není průnik s osou y . Průsečík s osou x zjistíme řešením rovnice $f(x) = 0$. Protože x rovno nule být nemůže, dostaneme

$$x \ln(|x|) = 0 \iff \ln(|x|) = 0 \iff |x| = 1 \iff x = \pm 1.$$

Graf tedy protíná osu x v bodech $x = -1$ a $x = 1$.

Teď zkusíme symetrii: Pro libovolné x z definičního oboru dostaneme

$$f(-x) = (-x) \cdot \ln(|-x|) = -x \ln(|x|) = -f(x),$$

funkce je tedy lichá.

Limity v krajních bodech intervalů $D(f)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) \stackrel{\infty \ln(\infty)}{=} \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) = \langle\langle 0 \ln(0^+) = 0 \cdot (-\infty) \rangle\rangle = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{L'H}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) \stackrel{(-\infty) \ln(\infty)}{=} -\infty.$$

Limitu v 0 zleva jsme nemuseli počítat, jednak jsme viděli, že se při výpočtu limity v 0 zprava to “zprava” vůbec nepoužilo, takže tentýž výpočet funguje i pro tu zleva, a druhá víme, že je funkce lichá, čili když limita v nule zprava vyjde L , musí symetrická limita v nule zleva vyjít $-L$.

Interpretace řeči asymptot: V počátku mohla být svislá (díra v $D(f)$), ale není, protože žádná jednostranná limita tam nevyšla nevlastní. V nekonečnu (a symetricky v mínus nekonečnu díky lichosti) nemůže být vodorovná asymptota, ale mohla by být šikmá. Rozhodneme to algoritmem:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x)) = \infty.$$

V nekonečnu tedy šikmá asymptota není, z lichosti funkce je vyloučena i šikmá asymptota v mínus nekonečnu.

2) Monotonii a lokální extrémů už jsme prozkoumali výše.

3) Konvexitu určíme pomocí druhé derivace,

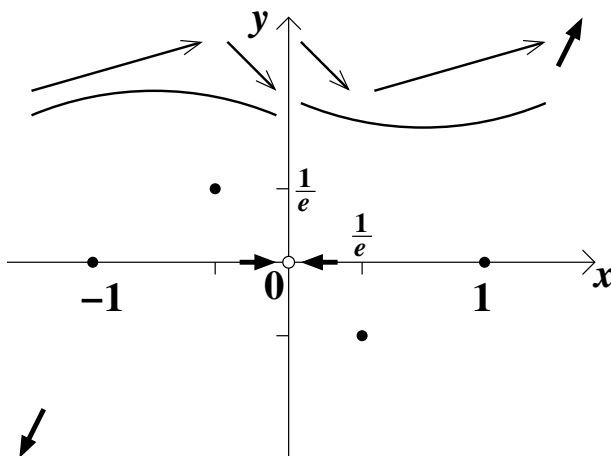
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0; \\ \frac{1}{-x} \cdot (-1), & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Dělicí body pro intervaly konvexity jsou body, kde f'' neexistuje (takové nejsou), a body, kde $f'' = 0$, takové také nejsou. Ty dva intervaly z definičního oboru tedy budou intervaly konvexity.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\frac{1}{x}$:	−	+
$f''(x)$:	−	+
$f(x)$:	∩	∪

Funkce je konkávní na $(-\infty, 0)$ a konvexní na $(0, \infty)$. Inflexní body nejsou (jediný bod, kde se konvexita mění, není v definičním oboru).

4) Závěr: Nakreslíme graf. Nejprve body, které jsme našli, limity a monotonii/konvexitu.

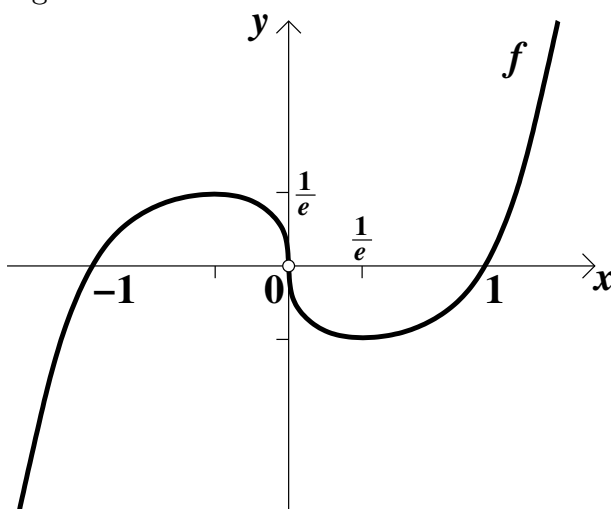


Vidíme, že obě větve směřují k počátku, dostaneme přesnější obrázek, když zjistíme, pod jakým úhlem. Na to potřebujeme najít limity derivace v nule z obou stran.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f'(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x) + 1) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f'(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\ln(-x) + 1) = -\infty.$$

Teď podle toho vytváříme graf.



10. Definiční obor je snadný, třetí odmocnina je lichá odmocnina a spolke cokoliv, v ní je polynom, který také sežere všechno: $D(f) = \mathbb{R}$. Teď zjistíme, zda se tento interval musí dále rozdělit kritickými body, abychom dostali intervaly monotonie.

Začneme derivací:

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{3[\sqrt[3]{x^2 - 2x}]^2}.$$

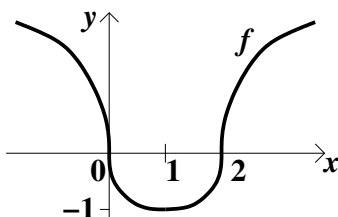
Nejprve se podíváme, zda $f'(x) = 0$. To se stane, pokud $x = 1$, máme tedy kritický bod. Další možnost pro kritický bod je, že derivace někde v definičním oboru neexistuje. Pro to máme podmínku $x^2 - 2x = 0$, tj. $x = 0, 2$. Celkem tři kritické body rozdělí \mathbb{R} na čtyři intervaly (uzavřené tam, kde je f spojitá), jak je to na nich se znaménky?

	$(-\infty, 0)$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 2, \infty)$
$2x - 2 :$	-	-	+	+
$[\sqrt[3]{x^2 - 2x}]^2 :$	+	+	+	+
$f'(x) :$	-	-	+	+
$f(x) :$	↘	↘	↗	↗

Máme vedle sebe ležící intervaly se stejnou monotonií a nejsou odděleny dírou v definičním oboru,

musíme tedy zjistit, zda náhodou nejdou spojit. To je zde snadné určit: Protože je f spojitá v dotykových bodech 0 a 2, intervaly spojit jdou. Odpověď je tedy tato: f je klesající na $(-\infty, 1)$ a rostoucí na $(1, \infty)$. Vidíme také, že $f(1) = -1$ je lokální minimum a f nemá lokální maxima.

Poznámka: Vidíme, že $f'(0) = -\infty$ a $f'(2) = \infty$, takže graf funkce má v těchto bodech svislou tečnu. Obrázek je mimochodem



11. Nejsou žádné komplikace, tedy $D(f) = \mathbb{R}$. Budeme postupovat standardním způsobem. Nejprve najdeme kritické body pomocí derivace:

$f'(x) = e^{x^3+3ax^2}(3x^2 + 6ax) = 3e^{x^3+3ax^2}x(x + 2a)$, z rovnice $f'(x) = 0$ dostaneme $x = 0, -2a$. Dalším možným zdrojem kritických bodů jsou body definičního oboru, kde derivace neexistuje, ale zde takové nejsou, protože f' je definovaná na celém $D(f)$.

Intervaly závisí na vzájemné poloze kritických bodů, tedy na znaménku a . Musíme tedy rozebrat možné případy.

$a > 0$: Krit. body:

$x = -2a, 0$
 $-2a < 0$

	$(-\infty, -2a)$	$\langle -2a, 0 \rangle$	$\langle 0, \infty \rangle$
x :	-	-	+
$x + 2a$:	-	+	+
$3e^{x^3+3ax^2}$:	+	+	+
f' :	+	-	+
f :	↗	↘	↗

lok. maximum $f(-2a) = e^{4a^3}$
 lok. minimum $f(0) = 1$

$a = 0$: $f(x) = e^{x^3}$, $f'(x) = 3x^2e^{x^3}$.

Krit. body:

$x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$\langle 0, \infty \rangle$
x^2 :	+	+
$3e^{x^3}$:	+	+
f' :	+	+
f :	↗	↗

lok. maximum neex.
 lok. minimum neex.

Protože je f spojitá v 0, intervaly lze spojit. f je rostoucí na \mathbb{R} .

$a < 0$: Krit. body:

$x = 0, -2a$
 $0 < -2a$

	$(-\infty, 0)$	$\langle 0, -2a \rangle$	$\langle -2a, \infty \rangle$
x :	-	+	+
$x + 2a$:	-	-	+
$3e^{x^3+3ax^2}$:	+	+	+
f' :	+	-	+
f :	↗	↘	↗

lok. maximum $f(0) = 1$
 lok. minimum $f(-2a) = e^{4a^3}$

12. Potřebujeme porovnat hodnoty f ve všech podezřelých bodech. Protože hledáme globální extrémy na uzavřeném intervalu, krajní body jsou kandidáti: $x = 0, x = 4$.

Další kandidáty dostaneme jako podezřelé body derivace. Nejprve se potřebujeme zbavit absolutní hodnoty, rovnítko dáme třeba k první variantně:

$$f(x) = \begin{cases} (x - 3) \cdot (x + 1), & x - 3 \geq 0; \\ -(x - 3) \cdot (x + 1), & x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & x \geq 3; \\ -x^2 + 2x + 3, & x < 3. \end{cases}$$

Derivujeme pomocí vzorců na otevřených intervalech, máme tedy

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x > 3; \\ 2 - 2x, & x < 3. \end{cases}$$

Nedostaneme takto derivaci v bodě $x = 3$. Mohli bychom ji zkusit najít přes jednostranné derivace, ale to je zbytečné, my jen hledáme podezřelé body a nestane se nic špatného, když si vezmeme nějaký navíc, tak tam tento přihodíme. Teď musíme vyřešit $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} 2x - 2 = 0, & x > 3; \\ 2 - 2x = 0, & x < 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1, & x > 3; \\ x = 1, & x < 3. \end{cases}$$

Všimněte si, že první alternativa vedla na $x = 1$, to ale neleží v oboru, na kterém je dotyčná rovnice relevantní ($x > 3$), a tak to není opravdu bod, kde by bylo $f'(x) = 0$. Nicméně na druhém řádku (kde $x < 3$) opět dostaneme $x = 1$ a tudíž to nakonec je podezřelý bod. Z derivace tedy máme dva podezřelé body, $x = 1$ a $x = 3$, oba leží v intervalu, na kterém hledáme globální extrém, proto žádný nevyřadíme.

Celkově jsou tedy čtyři podezřelé body, podíváme se, jaké v nich má funkce hodnoty:

$$f(0) = 3, \quad f(4) = 5, \quad f(1) = 4, \quad f(3) = 0.$$

Porovnáním hodnot vidíme, že f má na $\langle 0, 4 \rangle$ globální maximum $f(4) = 5$ a globální minimum $f(3) = 0$. Můžeme to také zapsat takto: $\max_{\langle 0, 4 \rangle}(f) = f(4) = 5$ a $\min_{\langle 0, 4 \rangle}(f) = f(3) = 0$.