

## Řešené teoretičtější příklady

1. Určete symetrii funkce  $f(x) = \sin\left(\frac{1-|x|}{x^3}\right)$ , svou odpověď dokažte.
2. Uvažujte funkci  $f(x) = \ln(4-2x)$ .
  - a) Určete její monotonii a svou odpověď dokažte podle definice.
  - b) Dokažte, že je  $f$  prostá, a najděte její inverzní funkci. Dokažte, že to, co jste našli, je opravdu inverzní funkce. Jaký má obor hodnot?
3. Podle definice dokažte, že  $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x^2 - 18}{x - 3}\right) = 12$ .
4. Najděte podle definice  $f'(1)$ , derivaci funkce  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}, & x \neq 1; \\ -\pi, & x = 1 \end{cases}$  v bodě 1.
5. Uvažujme funkci  $f(x) = x^2 - 2x$ . Najděte tečnu (tečny) grafu této funkce, které splňují podmínku:
  - a) tečna je rovnoběžná s přímkou  $2y + 3x = 1$ ,
  - b) tečna prochází bodem  $(0, -1)$ .
6. Dokažte, že pro  $x > -1$  máme  $\arctg\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4} - \arctg(x)$ .
7. Dokažte, že pro  $x \geq 0$  máme  $e^x > 2x$ .
8. Určete trojúhelník o největším obsahu, který se vejde do kružnice o poloměru  $R$ .
9. Rozhodněte, zda konverguje integrál  $\int_1^{\infty} \frac{2^x + x}{e^x + x^2} dx$ .
10. Uvažujme  $a_n = \frac{n+1}{n-1}$ .
  - a) Podle definice dokažte, že  $\{a_n\}$  je klesající.
  - b) Podle definice dokažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$ .

### Řešení:

1. Máme  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Pro libovolné  $x \in D(f)$  dosadíme  $(-x)$  do  $f$ :

$$f(-x) = \sin\left(\frac{1-|-x|}{(-x)^3}\right) = \sin\left(\frac{1-|x|}{-x^3}\right) = \sin\left(-\frac{1-|x|}{x^3}\right) = -\sin\left(\frac{1-|x|}{x^3}\right) = -f(x).$$

Funkce je lichá.

2. Máme  $D(f) = (-\infty, 2)$ .

a) Monotonii zjistíme nejjednodušeji pomocí derivace:

$f'(x) = \frac{-2}{4-2x} < 0$  pro všechna  $x < 2$ , funkce je tedy na  $(-\infty, 2)$  klesající (a je to i důkaz, ale ne podle definice).

Teď to tedy dokážeme podle definice. Vezmeme libovolné  $x < y \in D(f)$ . Zkusíme upravit nerovnost  $x < y$  tak, aby se na obou stranách objevila daná funkce. Nejprve ji vynásobíme záporným číslem  $-2$ , musíme tedy změnit směr nerovnosti. Pak přičteme 4:

$$x < y \implies -2x > -2y \implies 4 - 2x > 4 - 2y.$$

Teď na obě strany aplikujeme rostoucí funkci logaritmus; víme, že při aplikaci rostoucí funkce neměníme směr nerovnosti.

$$4 - 2x > 4 - 2y \implies \ln(4 - 2x) > \ln(4 - 2y) \implies f(x) > f(y).$$

Tím je důkaz hotov, ukázali jsme, že pro libovolné  $x < y \in D(f)$  je  $f(x) > f(y)$ .

b) Protože jsme dokázali, že je  $f$  ryze monotónní na intervalu  $D(f)$ , je tam nutně i prostá. Jak by fungoval důkaz podle definice? Uvažujme libovolná dvě čísla  $x_1, x_2 \in D(f)$  a předpokládejme, že  $f(x_1) = f(x_2)$ . Na tuto rovnost aplikujeme funkci exponenciálu:

$$\ln(4 - 2x_1) = \ln(4 - 2x_2) \implies e^{\ln(4 - 2x_1)} = e^{\ln(4 - 2x_2)} \implies 4 - 2x_1 = 4 - 2x_2.$$

Poslední vzorec plyne z toho, že logaritmus a exponenciála se coby funkce navzájem inverzní "vyruší". Teď už standardním způsobem vyřešíme pro proměnné:

$$4 - 2x_1 = 4 - 2x_2 \implies -2x_1 = -2x_2 \implies x_1 = x_2.$$

Dokázali jsme, že implikace  $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$  platí pro libovolná dvě čísla z  $D(f)$ , takže funkce je opravdu prostá.

Inverzní funkci najdeme tak, že rovnici  $y = f(x)$  vyřešíme pro  $x$ , zase začneme aplikováním exponenciály na obě strany, abychom se zbavili logaritmu:

$$y = \ln(4 - 2x) \implies e^y = 4 - 2x \implies 2x = 4 - e^y \implies x = 2 - \frac{1}{2}e^y.$$

Našli jsme tedy inverzní funkci  $f_{-1}(y) = 2 - \frac{1}{2}e^y$ .

Jak se dokáže, že je to opravdu inverzní funkce? Za prvé, pro každé  $x \in D(f)$  máme

$$f_{-1}(f(x)) = f_{-1}(\ln(4 - 2x)) = 2 - \frac{1}{2}e^{\ln(4 - 2x)} = 2 - \frac{1}{2}(4 - 2x) = x.$$

Naopak pro všechna  $y \in R(f)$  máme

$$f(f_{-1}(y)) = f(2 - \frac{1}{2}e^y) = \ln(4 - 2(2 - \frac{1}{2}e^y)) = \ln(e^y) = y.$$

Tím je důkaz hotov.

Platí:  $R(f_{-1}) = D(f) = (-\infty, 2)$ . Mimochodem, také  $R(f) = D(f_{-1}) = \mathbb{R}$ .

**3.** Je-li dáno  $\varepsilon > 0$ , musíme vyhrát hru, tedy přinutit  $f(x)$ , aby splňovalo  $|f(x) - 12| < \varepsilon$ , tím, že omezíme  $x$  na redukované okolí bodu 3. Přesně to provedeme tak, že najdeme  $\delta > 0$ , aby pro  $x$  splňující  $0 < |x - 3| < \delta$  platilo  $|f(x) - 12| < \varepsilon$ . Cílovou nerovnost prozkoumáme:

$$\begin{aligned} |f(x) - 12| < \varepsilon &\iff \left| \frac{2x^2 - 18}{x - 3} - 12 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{2x^2 - 18 - 12x + 36}{x - 3} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{2x^2 - 12x + 18}{x - 3} \right| < \varepsilon \\ &\iff \left| \frac{2(x - 3)^2}{x - 3} \right| < \varepsilon \iff 2|x - 3| < \varepsilon \iff |x - 3| < \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Vidíme, že pro "x blízko 3" tak, jak to vyšlo v posledním výrazu, je  $|f(x) - 12| < \varepsilon$ . Proto zvolíme za  $\delta$  číslo  $\frac{1}{2}\varepsilon$ . Vyhráli jsme tím hru?

Jestliže  $|x - 3| < \delta$ , pak také  $|x - 3| < \frac{1}{2}\varepsilon$  a obrácením toho výpočtu dostaneme  $|f(x) - 12| < \varepsilon$ . Hotovo.

**4.** Je daná funkce vůbec spojitá v  $a = 1$ ?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} \right) = \left\langle \frac{0}{0} \implies \text{l'H} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\pi \cos(\pi x)}{1} \right) = -\pi = f(1).$$

Funkce je tedy spojitá v  $a = 1$ , a proto je šance na existenci derivace. Dle definice je

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\frac{\sin(\pi x)}{x - 1} + \pi}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sin(\pi x) + \pi x - \pi}{(x - 1)^2} \right) = \left\langle \frac{0}{0} \implies \text{l'H} \right\rangle \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\pi \cos(\pi x) + \pi}{2(x - 1)} \right) = \left\langle \frac{0}{0} \implies \text{l'H} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{-\pi^2 \sin(\pi x)}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Limita konvergovala, proto  $f'(1) = 0$ .

5. Budeme hledat tečnu v neznámém bodě  $(a, f(a))$ . Tato tečna má rovnici

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \implies y = (2a - 2)(x - a) + a^2 - 2a = (2a - 2)x - a^2.$$

a) Jak se pozná paralelnost? Musí být shodné směrnice. Přímka  $2y + 3x = 1$  se přepíše jako  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ , takže má směrnici  $k = -\frac{3}{2}$ . Hledaná tečna tedy musí mít také tuto směrnici, což dává rovnici  $-\frac{3}{2} = f'(a) = 2a - 2$ . Odtud  $a = \frac{1}{4}$ .

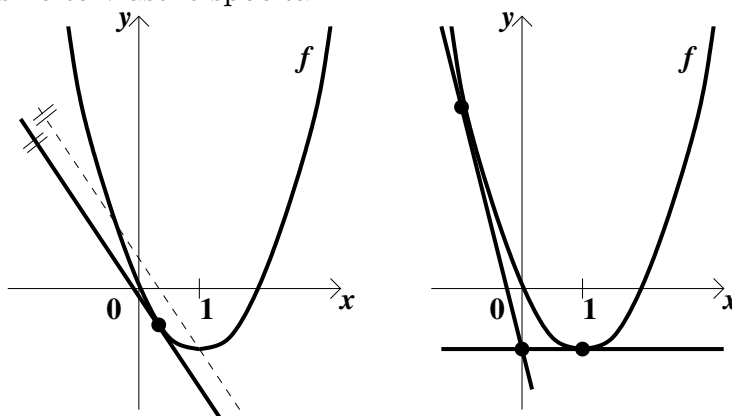
Řešení: Hledaná tečna je tečna v bodě  $(\frac{1}{4}, -\frac{7}{16})$  a má rovnici  $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{16}$ .

b) Zde se chce, aby hledaná tečna procházela bodem  $(0, -1)$ . Jinými slovy, tento bod musí udělat výše napsanou obecnou rovnici tečny pravdivou. Máme tedy po dosazení:

$$-1 = (2a - 2) \cdot 0 - a^2 \implies a = \pm 1.$$

Jsou dvě řešení. Tečna v bodě  $(-1, 3)$  o rovnici  $y = -4x - 1$  a tečna v bodě  $(1, -1)$  o rovnici  $y = -1$ .

Obrázek ukáže, co jsme to vlastně spočítali:



6. Máme ukázat, že funkce  $f(x) = \operatorname{arctg}(\frac{1-x}{1+x})$  a  $g(x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(x)$  splňují  $f = g$  na množině  $M = (-1, \infty)$ . Vzhledem ke tvaru množiny se nabízí oblíbený trik. Nejprve ověříme, že příslušná nerovnost platí v nějakém bodě této množiny, třeba v nule:  $f(0) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$  a  $g(0) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{4}$ , proto opravdu  $f(0) = g(0)$ .

Zajímavý trik je porovnávat v nekonečnu, samozřejmě limitou:  $f(\infty) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$  a  $g(\infty) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$ .

Teď už stačí jen ukázat, že tyto funkce rostou stejným způsobem, tedy že  $f' = g'$  na  $M$ .

$$\text{Opravdu: } f'(x) = \frac{1}{(\frac{1-x}{1+x})^2 + 1} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} = \frac{-2}{2x^2 + 2} = \frac{-1}{x^2 + 1},$$

$$\text{stejně jako } g'(x) = 0 - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{-1}{x^2 + 1}.$$

7. Máme ukázat, že funkce  $f(x) = e^x$  a  $g(x) = 2x$  splňují  $f > g$  na množině  $M = \langle 0, \infty \rangle$ . Vzhledem ke tvaru množiny se nabízí oblíbený trik. Nejprve ověříme, že příslušná nerovnost platí na začátku této množiny:  $f(0) = 1, g(0) = 0$ , proto opravdu  $f(0) > g(0)$ .

Kdybychom ještě ukázali, že funkce  $f$  také roste rychleji než funkce  $g$  na množině  $M$ , tak je to hotovo. Bohužel,  $f'(x) = e^x$ , zatímco  $g'(x) = 2$ , takže pro malá kladná  $x$  máme  $g' > f'$ . Situace je tedy taková, že sice  $f$  začne větší, ale pak  $g$  roste chvíli rychleji, proto nelze vyloučit, že  $f$  někde předžene. Takže tento přístup—jinak docela účinný—v tomto příkladě selhal.

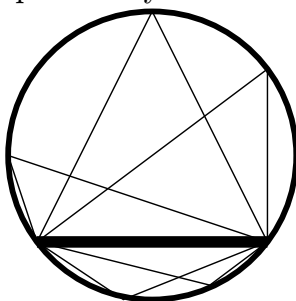
Potřebujeme tedy alternativní pohled na problém. Všimněte si, že nerovnost  $f > g$  je ekvivalentní nerovnosti  $h(x) = e^x - 2x > 0$  na  $M$ . Zda je taková nerovnost pravdivá, zjistíme například tak, že najdeme globální minimum  $h$  na  $M$  a podíváme se, jestli je kladné. Nejprve tedy kandidáty. Jsou dva druhy kandidátů na globální minimum, krajní body  $M$ , tedy  $0$  a  $\infty$ , a pak kritické body. Ty najdeme řešením rovnice  $h'(x) = e^x - 2 = 0$ , tedy  $x = \ln(2)$ . Teď porovnáme hodnoty:

$$h(0) = 1, h(\ln(2)) = 2 - 2\ln(2) = 2(1 - \ln(2)), h(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} (h) = \infty.$$

Protože  $2 > 1$ , je  $\ln(2) > 0$  a proto  $h(\ln(2)) < h(0)$ . Globální minimum  $h$  na množině  $M$  je tedy v bodě  $\ln(2)$ . Jaké znaménko má toto minimum? Protože  $2 < e$ , je i  $\ln(2) < 1$  a tudíž  $1 - \ln(2) > 0$ . Proto  $h(\ln(2)) > 0$  a následně i  $h > 0$  všude na  $M$ . Tím jsme dokázali, že opravdu  $e^x > 2x$  pro  $x \geq 0$ .

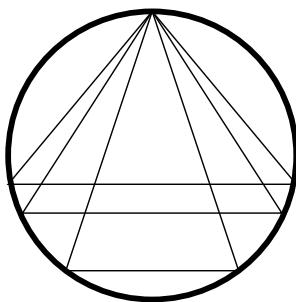
**8.** Nejprve musíme úlohu převést na matematiku a k tomu je třeba zredukovat počet proměnných, protože pro začátek máme tři vrcholy trojúhelníku zcela libovolně uvnitř kruhu. Začneme tím, že když maximalizujeme obsah, nemá smysl uvažovat trojúhelníky malé, které se nedotýkají kružnice. Budeme tedy uvažovat pouze trojúhelníky vepsané do kružnice, takže už jsou jen tři parametry (polohy vrcholů na kružnici).

Když už máme trojúhelník, lze vždy situaci otočit tak, aby se některá strana stala vodorovnou a ležela pod středem kružnice. Taková strana je pak nutně symetrická podle svislé osy kružnice. Vezměme si jednu takovou vodorovnou stranu pod středem a uvažujme všechny vepsané trojúhelníky, které lze s její pomocí vytvořit.

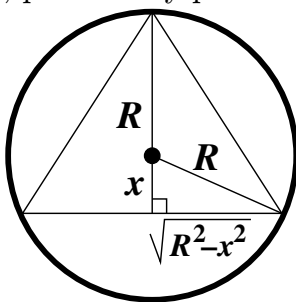


Protože obsah je dán základnou (ta je společná pro všechny) a výškou, největší obsah mezi nimi má ten s největší výškou, tedy ten s vrcholem uprostřed nahoře, rovnoramenný trojúhelník.

Tím se situace dále zredukovala, protože pro každou takovou základnu už nemá smysl uvažovat jiné trojúhelníky. Hledaný extrémní trojúhelník tedy budeme hledat mezi rovnoramennými trojúhelníky s vodorovnými základnami.



Tyto trojúhelníky už lze popsat jediným parametrem, například vzdáleností základny od středu. Je tam ještě jeden parametr, pevně daný poloměr kružnice.



Obsah takového trojúhelníka je jasný, má základnu  $2\sqrt{R^2 - x^2}$  a výšku  $R + x$ . Máme tedy

maximalizovat funkci  $A(x) = \frac{1}{2}(R+x)2\sqrt{R^2-x^2}$  pro  $x \in \langle 0, R \rangle$ . Kritický bod:

$$A'(x) = \sqrt{R^2-x^2} + (R+x) \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}} = 0 \implies 2x^2 + Rx - R^2 = 0 \implies x = -R, \frac{1}{2}R.$$

Podmínce  $x \in \langle 0, R \rangle$  vyhovuje jen druhá hodnota. Dále musíme uvažovat krajní body intervalu. Pro globální maximum jsou tedy tři kandidáti,  $x = 0$ ,  $x = \frac{1}{2}R$ ,  $x = R$ . Porovnáme obsahy:  $A(0) = 0$ ,  $A(\frac{R}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ ,  $A(R) = 0$ , tedy maximum je pro  $x = \frac{1}{2}R$ .

Závěr: Maximální obsah se dostane vepsaným rovnoramenným trojúhelníkem o základně  $\sqrt{3}R$  a výšce  $\frac{3}{2}R$ . Tento trojúhelník má ramena o délce  $\sqrt{3}R$ , jinými slovy, optimálním řešením je vepsaný rovnostranný trojúhelník, má obsah  $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ .

**9.** Tento integrál nebudeme umět přímo spočítat, proto jsou jedinou nadějí nějaké testy konvergence. Což takhle srovnávací? Problémy jsou s nekonečnem a víme, že okolo něj se dají mocniny vzhledem k exponenciálám ignorovat. Funkce  $\frac{2^x+x}{e^x+x^2}$  a  $\frac{2^x}{e^x}$  nelze porovnat pomocí nerovnosti, protože není bez delších výpočtů zřejmé, která z těchto funkcí je větší, nebo jestli se dokonce střídavě nepřehánějí. Zkusíme tedy limitní srovnávací kritérium, protože víme, že pro velká  $x$  máme

$$f(x) = \frac{2^x+x}{e^x+x^2} \sim \frac{2^x}{e^x} = g(x).$$

Musíme ověřit, že testovaná funkce opravdu dobře odhaduje danou funkci okolo nekonečna:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2^x+x}{e^x+x^2} \frac{e^x}{2^x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+\frac{x}{2^x}}{1+\frac{x^2}{e^x}} \right) = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Při výpočtu jsme použili  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{2^x} \right) = \ll \frac{\infty}{\infty} \implies \text{l'H} \gg = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln(2)2^x} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{e^x} \right) = \ll \frac{\infty}{\infty} \implies \text{l'H dvakrát} \gg = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{e^x} \right) = 0.$$

Srovnání jsme ověřili, máme proto také  $\int_1^{\infty} f(x) dx \sim \int_1^{\infty} g(x) dx$ . Co tedy víme o testovacím integrálu?

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{2^x}{e^x} dx &= \left[ \frac{1}{\ln(2/e)} \left( \frac{2}{e} \right)^x \right]_1^{\infty} = \frac{1}{\ln(2/e)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{2}{e} \right)^x \right) - \frac{\frac{2}{e}}{\ln(2/e)} \\ &= \ll \left| \frac{2}{e} \right| < 1 \implies \left( \frac{2}{e} \right)^{\infty} = 0 \gg = \frac{1}{1-\ln(2)} \frac{2}{e} < \infty. \end{aligned}$$

Protože testovací integrál konverguje, podle limitního srovnávacího kritéria konverguje i integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{2^x+x}{e^x+x^2} dx.$$

**10. a) Monotonie:** Máme dokázat, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí  $a_{n+1} < a_n$ . Tak se na to podívejme:

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\iff \frac{(n+1)+1}{(n+1)-1} < \frac{n+1}{n-1} \iff \frac{n+2}{n} < \frac{n+1}{n-1} \iff (n+2)(n-1) < (n+1)n \\ &\iff n^2+n-2 < n^2+n \iff -2 < 0. \end{aligned}$$

Dostali jsme výrok pravdivý pro  $n \in \mathbb{N}$ , a protože úpravy byly ekvivalence, nutně platí i  $a_{n+1} < a_n$ .

b) Je-li dáno  $\varepsilon > 0$ , musíme vyhrát hru, tedy přinutit  $a_n$ , aby splňovalo  $|a_n - 1| < \varepsilon$ , tím, že omezíme  $n$  na velké hodnoty. Přesně to provedeme tak, že najdeme hodnotu  $N$ , aby pro

$n \geq N$  platilo  $|a_n - 1| < \varepsilon$ . Cílovou nerovnost prozkoumáme:

$$\begin{aligned} |a_n - 1| < \varepsilon &\iff \left| \frac{n+1}{n-1} - 1 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{n+1-n+2}{n-1} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{2}{n-1} \right| < \varepsilon \\ &\iff \frac{2}{n-1} < \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} < n-1 \iff n > 1 + \frac{2}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Vidíme, že pro “ $n$  velké” tak, jak to vyšlo v posledním výrazu, je  $|a_n - 1| < \varepsilon$ . Proto zvolíme za  $N$  libovolné přirozené číslo splňující  $N > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$ . Vyhráli jsme tím hru?

Jestliže  $n \geq N$ , pak také  $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$  a obrácením toho výpočtu dostaneme  $|a_n - 1| < \varepsilon$ . Hotovo.