

MA2: Cvičné příklady—Funkce více proměnných: Derivace, geometrie

Spočítejte parciální derivace prvního řádu následujících funkcí:

1. $f(x, y) = e^{2x^2+y^2+2xy+2y}$, 2. $f(x, y) = \frac{x}{x+y^2}$,
 3. $f(x, y, z) = \sin(x^3 + z) \ln(z) + x^2y^2z$, 4. $f(x, y, z) = \frac{x^2 e^{5y+3z}}{\sin(z)} + x^y$.

Spočítejte parciální derivace druhého řádu následujících funkcí:

5. $f(x, y) = \sin(x^2 + xy)$, 6. $f(x, y, z) = x\sqrt{y+2z}$.
 7. Pro funkci $f(x, y) = x \ln(xy + 1)$ najděte její gradient v $(1, 0)$ a její derivaci ve směru $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$ v $(1, 0)$.

8. Předpokládejme, že jsme v bodě daném $x = 1$, $y = 2$ a výška terénu kolem nás je popsána funkcí $f(x, y) = \frac{1}{3x^2+y^2+1}$.

- a) Jestliže upustíme míč, kterým směrem se začne kutálet?
 b) Pokud vyrazíme směrem $\vec{v} = (-3, 4)$, jakou rychlostí se bude země zvedat/klesat?

9. Obdélník na obrazovce má šířku 10 cm a výšku 6 cm. Chytíme jeho pravý dolní roh myší a začneme jej táhnout diagonálně nahoru a doprava, takže se šířka obdélníka zvětšuje rychlostí 2 cm za sekundu a výška zmenšuje stejnou rychlostí. Bude se obsah obdélníka zvětšovat či zmenšovat? Jak rychle?

10. Uvažujte elipsu danou $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Najděte tečnu a normálu k této elipse v bodě $(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

11. Uvažujte třídimenzionální elipsoid daný $\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6} = 1$. Najděte tečnou rovinu a normálu k tomuto povrchu v bodě $(0, 1, -1)$.

12. Uvažujte paraboloid daný $z = x^2 + y^2$. Najděte jeho tečnou rovinu v bodě $(1, 2, 5)$.