

## MA2: Cvičné příklady—Funkce více proměnných: Derivace, geometrie Stručná řešení

$$1. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = (4x + 2y)e^{2x^2+y^2+2xy+2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (2y + 2x + 2)e^{2x^2+y^2+2xy+2y}.$$

$$2. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x+y^2)-x}{(x+y^2)^2} = \frac{y^2}{(x+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x+y^2)^2}.$$

$$3. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^3 + z)3x^2 \ln(z) + 2xy^2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 2yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos(x^3 + z) \ln(z) + \sin(x^3 + z) \frac{1}{z} + x^2 y^2.$$

$$4. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \frac{e^{5y+3z}}{\sin(z)} + y x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5e^{5y+3z} \frac{x^2}{\sin(z)} + \ln(x) x^y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 \frac{3e^{5y+3z} \sin(z) - e^{5y+3z} \cos(z)}{\sin^2(z)}.$$

$$5. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = (2x + y) \cos(x^2 + xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(x^2 + xy);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \cos(x^2 + xy) - (2x + y)^2 \sin(x^2 + xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos(x^2 + xy) - x(2x + y) \sin(x^2 + xy),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \sin(x^2 + xy).$$

$$6. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{y+2z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y+2z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x}{\sqrt{y+2z}};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2\sqrt{y+2z}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{1}{\sqrt{y+2z}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-x}{4[\sqrt{y+2z}]^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{-x}{2[\sqrt{y+2z}]^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{-x}{[\sqrt{y+2z}]^3}.$$

Derivace jsou jednodušší s  $\frac{1}{\sqrt{y+2z}} = (y+2z)^{-1/2}$ .

$$7. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \ln(xy+1) + \frac{xy}{xy+1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{xy+1};$$

proto  $\nabla f(1,0) = (0,1)$  a  $D_{\vec{u}}f(1,0) = \nabla f(1,0) \bullet \vec{u} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

8. a) Potřebujeme směr největšího spádu, což je  $-\nabla f(1,2)$ . Máme  $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{-6x}{(3x^2+y^2+1)^2}, \frac{-2y}{(3x^2+y^2+1)^2}\right)$ . Proto  $-\nabla f(1,2) = \left(\frac{3}{32}, \frac{2}{32}\right)$ , můžeme vzít  $\vec{d} = (3,2)$ .

b) Potřebujeme derivaci ve směru  $D_{\vec{u}}f(1,2)$ , kde  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{5}(-3,4)$ , proto  $D_{\vec{u}}f(1,2) = \nabla f(1,2) \bullet \vec{u} = \frac{1}{32}(3,2) \bullet \frac{1}{5}(-3,4) = \frac{-1}{160}$ . Země v tomto směru klesá.

9. Je několik možností, jak k tomuto problému přistoupit.

1) Jedna možnost je umístit obdélník tak, aby byl jeho horní levý vrchol v počátku, pak je pravý dolní vrchol v bodě  $(10, -5)$ . Obsah je dán jako  $A(x,y) = -xy$ . Chceme vědět rychlost změny  $A$ , když se bod  $(10, -5)$  mění ve směru (a velikosti)  $\vec{v} = (2,2)$ .

$\nabla A = (-y, -x) \implies \nabla A(10, -5) = (5, -10)$ , proto  $D_{\vec{v}}A(10, -5) = -10$ . Plocha se zmenšuje rychlostí 10  $\text{cm}^2/\text{sec}$ .

2) Je také možné prostě vzít obsah  $A(x,y) = xy$  a uvažovat případ, kdy  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  závisí na čase. Derivujeme vzhledem k  $t$ :  $A'(x,y) = \frac{\partial A}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial A}{\partial y} y'(t) = y x'(t) + x y'(t)$ .

Máme  $x = 10$ ,  $y = 5$  a dané údaje jsou  $x' = 2$ ,  $y' = -2$ . Proto  $A'(10,5) = 5 \cdot 2 + 10 \cdot (-2) = -10$ .

Je také možné použít totální diferenciál  $dA(10,5) = 5dx + 10dy$ .

10. Interpretujeme to jako úlohu o hladině konstantnosti pro  $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . Ověříme, že daný bod  $P$  splňuje  $f(x,y) = 1$ , takže opravdu leží na dané křivce.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \text{proto } \nabla f(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -1\right).$$

Tento vektor je kolmý (normálový) ke křivce, proto také k tečně. Její rovnice proto je

$$\nabla f(P) \bullet ((x,y) - P) = 0 \implies \frac{1}{2}\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) - (y + \frac{1}{2}) = 0 \implies y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x - 2.$$

Abychom našli normálu, můžeme použít  $\nabla f(P)$  jako její směrový vektor, dostaneme parametrickou rovnici  $x = \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}t$ ,  $y = -\frac{1}{2}t$ . Abychom dostali klasickou rovnici, eliminujeme  $t$ , dostaneme  $x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ .

Lze také najít vektor kolmý k  $\nabla f(P)$ , například vektor  $(1, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ , a pak najdeme rovnici normály pomocí  $(1, \frac{1}{2}\sqrt{3}) \bullet ((x,y) - P) = 0$ , zase skončíme s  $x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ .

11. Interpretujeme to jako úlohu o hladině konstantnosti pro  $f(x,y,z) = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6} = 1$ . Ověříme, že daný bod  $P$  splňuje  $f(x,y,z) = 1$ , takže opravdu leží na dané křivce.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x-1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{3}z, \quad \text{proto } \nabla f(0,1,-1) = \left(-1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Tento vektor je kolmý (normálový) ke křivce, proto také k tečné rovině. Její rovnice proto je

$$\nabla f(P) \bullet ((x,y,z) - P) = 0 \implies -x + \frac{2}{3}(y-1) - \frac{1}{3}(z+1) = 0 \implies -x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 1 \implies 3x - 2y + z + 3 = 0.$$

Abychom našli normálu, můžeme použít  $\nabla f(P)$  jako směrový vektor, dostaneme parametrickou rovnici  $x = -t$ ,  $y = 1 + \frac{2}{3}t$ ,  $z = -1 - \frac{1}{3}t$ .

**12.** Potřebujeme normálový vektor. Jsou dvě možnosti.

1) Přístup přes hladinu konstantnosti:  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ ,  $\nabla F = (2x, 2y, -1)$ , proto máme normálový vektor  $\nabla F(1, 2, 5) = (2, 4, -1)$ . Z toho dostaneme tečnou rovinu pomocí

$$\nabla f(P) \bullet ((x, y, z) - P) = 0 \implies 2(x - 1) + 4(y - 2) - (z - 5) = 0 \implies 2x + 4y - z = 5.$$

2) Přístup přes graf  $f(x, y)$ : Teorie říká, že vektor  $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1)$  je kolmý ke grafu, zase to vede na  $(2, 4, -1)$ .