MA2: Cvičné příklady—Funkce více proměnných: Extrémy
Stručná řešení

1. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=e^{2x^2+y^2+2xy+2y}(4x+2y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=e^{2x^2+y^2+2xy+2y}(2y+2x+2)=0\end{aligned}\right\}\implies \left.\begin{aligned}2x+y&=0\\ y+x&=-1\end{aligned}\right\}\implies (1,-2).$$

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{x=1,\ y=-2}=\big[e^{2x^2+y^2+2xy+2y}(4x+2y)^2+4e^{2x^2+y^2+2xy+2y}\big]\Big|_{x=1,y=-2}=4,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{x=1,y=-2}=\big[e^{2x^2+y^2+2xy+2y}(2y+2x+2)(4x+2y)+2e^{2x^2+y^2+2xy+2y}\big]\Big|_{x=1,\ y=-2}=2,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{x=1,y=-2}=\big[e^{2x^2+y^2+2xy+2y}(2y+2x+2)^2+2e^{2x^2+y^2+2xy+2y}\big]\Big|_{x=1,y=-2}=2\implies H=\begin{pmatrix}4&2\\2&2\end{pmatrix}.$

$\Delta_1=h_{11}=4>0$, $\Delta_2=|H|=4>0$, proto $f(1,-2)=e^{-2}$ je lokální minimum.

2. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=3x^2-3=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=3y^2-12=0\end{aligned}\right\}\implies \left.\begin{aligned}x^2&=1\\ y^2&=4\end{aligned}\right\}\implies (\pm1,\pm2).$$

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y\implies H=\begin{pmatrix}6x&0\\0&6y\end{pmatrix}\implies \Delta_1=6x$, $\Delta_2=36xy$.

$(1,2)$: $\Delta_1=6>0$, $\Delta_2=72>0$, proto $f(1,2)=-18$ je lokální minimum.
$(1,-2)$: $\Delta_1=6>0$, $\Delta_2=-72<0$, proto $f(1,-2)=14$ je sedlo.
$(-1,2)$: $\Delta_1=-6<0$, $\Delta_2=-72<0$, proto $f(-1,2)=-14$ je sedlo.
$(-1,-2)$: $\Delta_1=-6<0$, $\Delta_2=72>0$, proto $f(-1,-2)=18$ je lokální maximum.

3. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=2x+y^2-16=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=2xy=0\end{aligned}\right\}\implies \left\{\begin{aligned}x=0&\implies y=\pm4\\ y=0&\implies x=8\end{aligned}\right\}\implies (0,\pm4),(8,0).$$

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x\implies H=\begin{pmatrix}2&2y\\2y&2x\end{pmatrix}\implies \Delta_1=2$, $\Delta_2=4x-4y^2$.

$(0,-4)$: $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=-64<0$, proto $f(0,-4)=0$ je sedlo.
$(0,4)$: $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=-64<0$, proto $f(0,4)=0$ je sedlo.
$(8,0)$: $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=32>0$, proto $f(8,0)=-64$ je lokální minimum.

4. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=-\frac{y^2}{x^2}+1=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{2y}{x}-\frac{2z^2}{y^2}=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{4z}{y}-\frac{4}{z^2}=0\end{aligned}\right\}\implies y=z^3\implies \left.\begin{aligned}\frac{z^6}{x^2}&=1\\ \frac{2z^3}{x}&=\frac{2}{z^4}\end{aligned}\right\}\implies \left.\begin{aligned}x^2&=z^6\\ x&=z^7\end{aligned}\right\}\implies z^6=z^{14}\implies z=0, z=\pm1.$$

$z=0\implies x=0, y=0$ ale to není v definičním oboru, $z=1\implies x=1, y=1$,
$z=-1\implies x=-1, y=-1$. Dva stacionární body, $(1,1,1)$ a $(-1,-1,-1)$.

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2y^2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2}{x}+\frac{4z^2}{y^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-\frac{4z}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{4}{y}+\frac{8}{z^3}$.

$$H(1,1,1)=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&6&-4\\0&-4&12\end{pmatrix}\implies \Delta_1=2>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2&-2\\-2&6\end{vmatrix}=8>0,\ \Delta_3=64>0.$$

Proto $f(1,1,1)=7$ je lokální minimum.

$$H(-1,-1,-1)=\begin{pmatrix}-2&2&0\\2&-6&4\\0&4&-12\end{pmatrix}\implies \Delta_1=-2<0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-2&2\\2&-6\end{vmatrix}=8>0,\ \Delta_3=-64<0.$$

Proto $f(-1,-1,-1)=-7$ je lokální maximum.

5. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=3x^2-3=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=3y^2+3=0\end{aligned}\right\}\text{ nemá řešení, nejsou lokální extrémy.}$$

6. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=3x^2+6xy^2-27=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=6x^2y-6y=0\end{aligned}\right\}\implies \left.\begin{aligned}x^2+2xy^2&=9\\ y(x^2-1)&=0\end{aligned}\right\}\implies \left\{\begin{aligned}&y=0\implies x^2=9\implies x=\pm3\\ &x=1\implies 2y^2=8\implies y=\pm2\\ &x=-1\implies -2y^2=8\implies\emptyset\end{aligned}\right.$$

Stacionární body $(\pm 3,0)$, $(1,\pm 2)$.

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x+6y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=12xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x^2-6 \implies H=\begin{pmatrix}6x+6y^2 & 12xy\\ 12xy & 6x^2-6\end{pmatrix}$.

$(3,0)$: $H=\begin{pmatrix}18 & 0\\ 0 & 48\end{pmatrix}$. $\Delta_1=18>0$, $\Delta_2=18\cdot 48>0$, proto $f(3,0)=-54$ je lokální minimum.

$(-3,0)$: $H=\begin{pmatrix}-18 & 0\\ 0 & 48\end{pmatrix}$. $\Delta_1=-18<0$, $\Delta_2=-18\cdot 48<0$, proto $f(-3,0)=54$ je sedlo.

$(1,2)$: $H=\begin{pmatrix}30 & 24\\ 24 & 0\end{pmatrix}$. $\Delta_1=30>0$, $\Delta_2=-24^2<0$, proto $f(1,2)=-26$ je sedlo.

$(1,-2)$: $H=\begin{pmatrix}30 & -24\\ -24 & 0\end{pmatrix}$. $\Delta_1=30>0$, $\Delta_2=-24^2<0$, proto $f(1,-2)=-26$ je sedlo.

7. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=3x^2-3y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=3y^2-3x=0\end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned}x^2&=y\\ y^2&=x\end{aligned}\right\} \implies x^4=x \implies \begin{cases}x=0 \implies y=0\\ x=1 \implies y=1\end{cases} \implies (0,0),(1,1).$$

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y \implies H=\begin{pmatrix}6x & -3\\ -3 & 6y\end{pmatrix} \implies \Delta_1=6x$, $\Delta_2=36xy-9$.

$(0,0)$: $\Delta_1=0$, $\Delta_2=-9<0$, proto $f(0,0)=0$ je sedlo.
$(1,1)$: $\Delta_1=6>0$, $\Delta_2=27>0$, proto $f(1,1)=-1$ je lokální minimum.

8. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=4x^3-4x=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=2y=0\end{aligned}\right\} \implies x=0,\ x=\pm 1,\ y=1,\text{ independent equations} \implies (0,0),(1,0),(-1,0).$$

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2-4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2 \implies H=\begin{pmatrix}12x^2-4 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \implies \Delta_1=12x^2-4$, $\Delta_2=24x^2-8$.

$(0,0)$: $\Delta_1=-4<0$, $\Delta_2=-8<0$, proto $f(0,0)=-2$ je sedlo.
$(1,0)$: $\Delta_1=8>0$, $\Delta_2=16>0$, proto $f(1,0)=-3$ je lokální minimum.
$(-1,0)$: $\Delta_1=8>0$, $\Delta_2=16>0$, proto $f(-1,0)=-3$ je lokální minimum.

9. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=2x+y+3=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=x+2y=0\end{aligned}\right\} \implies -3y+3=0 \implies y=1, x=-2.$$

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2 \implies H=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \implies \Delta_1=2>0$, $\Delta_2=3>0$.

Proto $f(-2,1)=13$ je lokální minimum.

10. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=3x^2-3=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=3y^2-12=0\\ fz&=3z^2-12=0\end{aligned}\right\} \implies x=\pm 1,\ y=\pm 2,\ z=\pm 2.$$

Rovnice byly nezávislé, můžeme tedy volně kombinovat znaménka a je 8 stacionárních bodů.

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6z$. $H(x,y,z)=\begin{pmatrix}6x & 0 & 0\\ 0 & 6y & 0\\ 0 & 0 & 6z\end{pmatrix}$

point:	$\Delta_1=6x$	$\Delta_2=36xy$	$\Delta_3=216xyz$	
$f(1,2,2)=-34$	$+$	$+$	$+$	lok. minimum
$f(1,2,-2)=-2$	$+$	$+$	$-$	neidentifikovatelné
$f(1,-2,2)=-2$	$+$	$-$	$-$	sedlo
$f(1,-2,-2)=30$	$+$	$-$	$+$	sedlo
$f(-1,2,2)=-30$	$-$	$-$	$-$	sedlo
$f(-1,2,-2)=2$	$-$	$-$	$+$	sedlo
$f(-1,-2,2)=2$	$-$	$+$	$+$	neidentifikovatelné
$f(-1,-2,-2)=34$	$-$	$+$	$-$	lok. maximum

11. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=3x^2+3y^2-12y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=6xy-12x=0\end{aligned}\right\}\implies \left.\begin{aligned}&x^2+y^2-4y=0\\ &x(y-2)=0\end{aligned}\right\}\implies \left\{\begin{aligned}&x=0\implies y^2=4y\implies y=0,4\\ &y=2\implies x^2-4=0\implies x=\pm 2\end{aligned}\right.$$

Stacionární body: $(0,0),(0,4),(\pm 2,2)$.

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6y-12$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x \implies H=\begin{pmatrix}6x & 6y-12\\ 6y-12 & 6x\end{pmatrix}\implies \Delta_1=6x$, $\Delta_2=36x^2-36(y-2)^2$.

$(0,0)$: $\Delta_1=0$, $\Delta_2=-36\cdot 4<0$, proto $f(0,0)=0$ je sedlo.
$(0,4)$: $\Delta_1=0$, $\Delta_2=-36\cdot 4<0$, proto $f(0,4)=0$ je sedlo.
$(2,2)$: $\Delta_1=12\cdot 4>0$, $\Delta_2=36\cdot 4>0$, proto $f(2,2)=-16$ je lokální minimum.
$(-2,2)$: $\Delta_1=-12\cdot 4<0$, $\Delta_2=36\cdot 4>0$, proto $f(-2,2)=16$ je lokální maximum.

12. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=6x^2+18x-12=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=6y^2-6=0\end{aligned}\right\}\implies \left.\begin{aligned}&x^2+3x-2=0\\ &y^2=1\end{aligned}\right\}\implies x=1,2,\ y=\pm 1.$$

Nezávislé rovnice $\implies (1,1),(1,-1),(2,1),(2,-1)$.

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x+18$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y \implies H=\begin{pmatrix}12x+18 & 0\\ 0 & 12y\end{pmatrix}\implies \Delta_1=12x+18$, $\Delta_2=12(12x+18)y$.

$(1,1)$: $\Delta_1=30>0$, $\Delta_2=12\cdot 30>0$, proto $f(1,1)=-5$ je lokální minimum.
$(1,-1)$: $\Delta_1=30>0$, $\Delta_2=-12\cdot 30<0$, proto $f(1,-1)=3$ je sedlo.
$(2,1)$: $\Delta_1=42>0$, $\Delta_2=12\cdot 42>0$, proto $f(2,1)=24$ je lokální minimum.
$(2,-1)$: $\Delta_1=42>0$, $\Delta_2=-12\cdot 42<0$, proto $f(2,-1)=32$ je sedlo.

13. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=-2x+6=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=-2y=0\end{aligned}\right\}\implies x=3,y=0\implies (3,0).$$

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2 \implies H=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\implies \Delta_1=-2<0$, $\Delta_2=4>0$.

Proto $f(3,0)=12$ je lokální maximum.

14. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=-4x+4y+4=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=4x-6y-2=0\end{aligned}\right\}\implies x=2,y=1\implies (2,1).$$

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6 \implies H=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 4 & -6\end{pmatrix}\implies \Delta_1=-4$, $\Delta_2=8$.

Proto $f(2,1)=8$ je lokální maximum.

15. Stacionární body:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=-\frac{y^2}{x^2}+\frac14=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{2y}{x}-\frac{z^2}{y^2}=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{2z}{y}-\frac{2}{z^2}=0\end{aligned}\right\}\implies y=z^3\implies \left.\begin{aligned}\frac{z^6}{x^2}&=\frac14\\ \frac{2z^3}{x}&=\frac{1}{z^4}\end{aligned}\right\}\implies \left.\begin{aligned}&x^2=4z^6\\ &x=2z^7\end{aligned}\right\}\implies 4z^{14}=4z^6\implies z=0,z=\pm 1.$$

$z=0\implies x=0,y=0$ aleč to není v definičním oboru, $z=1\implies x=2,y=1$, $z=-1\implies x=-2,y=-1$. Dva stacionární body, $(2,1,1)$ a $(-2,-1,-1)$.

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2y^2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2}{x}+\frac{2z^2}{y^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-\frac{2z}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{2}{y}+\frac{4}{z^3}$.

$$H(2,1,1)=\begin{pmatrix}\frac14 & -\frac12 & 0\\ -\frac12 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 6\end{pmatrix}\implies \Delta_1=\frac14>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}\frac14 & -\frac12\\ -\frac12 & 3\end{vmatrix}=\frac12>0,\ \Delta_3=\frac14>0.$$

Proto $f(2,1,1)=4$ je lokální minimum.

$$H(-2,-1,-1)=\begin{pmatrix}-\frac14 & \frac12 & 0\\ \frac12 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -6\end{pmatrix}\implies \Delta_1=-\frac14<0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-\frac14 & \frac12\\ \frac12 & -3\end{vmatrix}=\frac12>0,\ \Delta_3=-\frac4<0.$$

Proto $f(-2,-1,-1)=-4$ je lokální maximum.

16. Stacionární body:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=6x-6y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=-6x+6y^2=0\end{array}\right\}\implies y^2-y=0\implies\left\{\begin{array}{l}y=0\implies x=0\\ y=1\implies y=1\end{array}\right\}\implies(0,0),(1,1).$$

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y\implies H=\begin{pmatrix}6&-6\\-6&12y\end{pmatrix}\implies\Delta_1=6$, $\Delta_2=72y-36$.

$(0,0)$: $\Delta_1=6>0$, $\Delta_2=-36<0$, proto $f(0,0)=0$ je sedlo.
$(1,1)$: $\Delta_1=6>0$, $\Delta_2=36>0$, proto $f(1,1)=-1$ je lokální minimum.

17. Stacionární body:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-6y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=24y^2-6x=0\end{array}\right\}\implies\left.\begin{array}{l}x^2=2y\\ x=4y^2\end{array}\right\}\implies 16y^4=2y\implies\left\{\begin{array}{l}y=0\implies x=0\\ y=\frac{1}{2}\implies x=1\end{array}\right\}\implies(0,0),\big(1,\tfrac{1}{2}\big).$$

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y\implies H=\begin{pmatrix}6x&-6\\-6&48y\end{pmatrix}\implies\Delta_1=6x$, $\Delta_2=288xy-36$.

$(0,0)$: $\Delta_1=0$, $\Delta_2=-36<0$, proto $f(0,0)=5$ je sedlo.
$\big(1,\frac{1}{2}\big)$: $\Delta_1=6>0$, $\Delta_2=144-36=108>0$, proto $f\big(1,\frac{1}{2}\big)=4$ je lokální minimum.

18. Stacionární body:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=2x-4x\,e^{-x^2}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=-2y=0\end{array}\right\}\implies y=0,x(1-2e^{-x^2})=0\implies x=0,x=\pm\sqrt{\ln(2)}\implies(0,0),(\pm\sqrt{\ln(2)},0).$$

Klasifikace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2+8x^2e^{-x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2\implies H=\begin{pmatrix}2+8x^2e^{-x^2}&0\\0&-2\end{pmatrix}$

$\implies\Delta_1=2+8x^2e^{-x^2}$, $\Delta_2=-4-16x^2e^{-x^2}$.

$(0,0)$: $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=-2<0$, proto $f(0,0)=2$ je sedlo.
$(\sqrt{\ln(2)},0)$: $\Delta_1=2+4\ln(2)>0$, $\Delta_2=-2-4\ln(2)<0$, proto $f(\sqrt{\ln(2)},0)=\ln(2)+1$ je sedlo.
$(-\sqrt{\ln(2)},0)$: $\Delta_1=2+4\ln(2)>0$, $\Delta_2=-2-4\ln(2)<0$, proto $f(-\sqrt{\ln(2)},0)=\ln(2)+1$ je sedlo.

19. $\nabla f=\lambda\nabla g$, $g(x,y)=x^2+y^2=4\implies\left|\begin{array}{l}y^3=\lambda 2x\\ 3xy^2=\lambda 2y\\ x^2+y^2=4\end{array}\right.$

Jestliže $x=0$, pak $y=0$ podle (#1) ale pak (#3) neplatí, takže $x=0$ nemožné. Pak z (#1) $\lambda=\frac{y^3}{2x}$, do (#2), $3x^2y^2=y^4$.
Jestliže $y=0$, pak $x=\pm 2$ a $\lambda=0$ řeší všechny rovnice.
Jestliže $y\neq 0$, pak $3x^2=y^2$, do (#3), $4x^2=4\implies x=\pm 1$. Pro $x=\pm 1$ je $y=\pm\sqrt{3}$.
Možné lokální extrémy jsou $f(2,0)=0$, $f(-2,0)=0$, $f(1,\sqrt{3}\,)=3\sqrt{3}$. $f(1,-\sqrt{3}\,)=-3\sqrt{3}$. $f(-1,\sqrt{3}\,)=-3\sqrt{3}$. $f(-1,-\sqrt{3}\,)=3\sqrt{3}$.
Podmínka $g=4$ definuje kružnici, což je omezená uzavřená množina. Proto musí f nabývat globální extrémy, děje se to v koncových bodech (ale kružnice takové nemá) nebo v bodech lokálních extrémů. Jediní kandidáti jsou tedy těch šest výše.
Závěr: Lokální/globální minima jsou $f(-1,\sqrt{3}\,)=f(1,-\sqrt{3}\,)=-3\sqrt{3}$. Lokální/globální maxima jsou $f(1,\sqrt{3}\,)=f(-1,-\sqrt{3}\,)=3\sqrt{3}$.

20. $\nabla f=\lambda\nabla g$, $g(x,y)=x^4+y^4-8x-8y=0\implies\left|\begin{array}{r}1=\lambda(4x^3-8)\\ 1=\lambda(4y^3-8)\\ x^4+y^4-8x-8y=0\end{array}\right.$

Evidentně $\lambda=0$ nemožné, takže první dvě rovnice dávají $4x^3-8=\frac{1}{\lambda}=4y^3-8\implies y=x$. Dosadit do (#3), $x^4-8x=8\implies x=0,2$.
Možné lokální extrémy jsou $f(0,0)=0$, $f(2,2)=4$.
Je množina definovaná $g=0$ omezená? Ano, protože pro velké hodnoty x,y lze ignorovat $8x$ a $8y$ a podmínka v zásadě zní $x^4+y^4=0$, čímž je nemožné pro x nebo y libovolně růst. Lze tedy odhadnout, že se nabývá globálních extrémů.
Závěr: Lokální/globální minimum je $f(0,0)=0$. Lokální/globální maximum je $f(2,2)=4$.

21. $\nabla f=\lambda\nabla g$, $g(x,y)=x^4-y^4-8x-8y=2\implies\left|\begin{array}{r}1=\lambda(4x^3-8)\\ 1=\lambda(-4y^3-8)\\ x^4-y^4-8x-8y=2\end{array}\right.$

Evidentně $\lambda=0$ nemožné, první dvě rovnice dávají $4x^3-8=\frac{1}{\lambda}=-4y^3-8\implies y=-x$. Dosadit do (#3), $2x^4=2\implies x=\pm 1$.

Možné lokální extrémy jsou $f(1,-1)=0$, $f(-1,1)=0$.
Je množina omezená? Podmínka $x^4-8x=y^4+8y+2$ umožňuje, aby šly x,y zároveň do nekonečna, pak také $f\to\infty$.
Závěr: Lokální/globální minimum je $f(1,-1)=f(-1,1)=0$. Globální maximum není nabyto, supremum je nekonečno.

22. $\nabla f=\lambda\nabla g$, $g(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \implies \left|\begin{array}{c} y=\lambda\frac{x}{4} \\ x=\lambda y \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{array}\right.$
Dát y z (#1) do (#2), $4x=\lambda^2x$. Jestliže $x=0$, pak dle (#1) také $y=0$, spor s (#3). Takže $x\neq 0$, proto $\lambda=\pm 2$.
Jestliže $\lambda=2$, pak $x=2y$, do (#3), $y^2=1$, $y=\pm 1$, body $(2,1)$ a $(-2,-1)$.
Jestliže $\lambda=-2$, pak $x=-2y$, do (#3), $y^2=1$, $y=\pm 1$, body $(-2,1)$ a $(2,-1)$.
Možné lokální extrémy jsou $f(2,1)=2$, $f(2,-1)=-2$, $f(-2,1)=-2$, $f(-2,-1)=2$.
Podmínka $g=4$ definuje elipsu, což je omezená uzavřená množina. Proto musí f nabývat globální extrémy, nastanou v koncových bodech (ale elipsa takové nemá) nebo v bodech lokálních extr-mů. Jediní kandidáti jsou tedy ty čtyři body výše.
Závěr: Lokální/globální minima jsou $f(2,-1)=f(-2,1)=-2$. Lokální/globální maxima jsou $f(2,1)=f(-2,-1)=2$.

23. $\nabla f=\lambda\nabla g$, $g(x,y)=x^2-2x+y^2-4y=0 \implies \left|\begin{array}{c} 2x=\lambda(2x-2) \\ 2y=\lambda(2y-4) \\ x^2-2x+y^2-4y=0 \end{array}\right.$
Nelze mít $x=1$ (pak (#1) zní$2=0$) a podobně $y\neq 1$, takže $\frac{x}{x-1}=\lambda=\frac{y}{y-2} \implies y=2x$. Dát do (#3), vyjde $5x^2-10x=0 \implies x=0,2$.
Možné lokální extrémy jsou $f(0,0)=0$, $f(2,4)=20$.
Podmínka $g=0$, tj. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ definuje kružnici, což je omezená uzavřená množina. Jediní kandidáti na globální extrémy jsou ty čtyři body výše.
Závěr: Lokální/globální minimum je $f(0,0)=0$. Lokální/globální maximum je $f(2,4)=20$.

24. $\nabla f=\lambda\nabla g$, $g(x,y)=x^3+y^3=2 \implies \left|\begin{array}{c} 1=\lambda 3x^2 \\ 1=\lambda 3y^2 \\ x^3+y^3=2 \end{array}\right.$
Nelze mít $\lambda=0$, proto $x^3=\frac{1}{3\lambda}=y^2$.
Jestliže $y=x$, pak (#3) dává$x^3=1$, $x=1$. Jestliže $y=-x$, pak (#3) dává$0=1$, nemožné.
Možná lokální extrém je $f(1,1)=2$.
Podmínka $g=2$ definuje množinu, která není omezená, umožňuje, aby současně $x\to\infty$, $y\to-\infty$, ale x a $-y$ musí zůstat blízké a tak f nemůže příliš růst. Dokonce je to tak, že pokud necháme $x\to\infty$, pak $x^3+y^3=2$ dává $x+y\to 0$. Jeden způsob, jak to vidět: Jestliže $x\to\infty$, pak $y=\sqrt[3]{2-x^3}\to-\infty$, proto $x^2-xy+y^2\to\infty$ a $2=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, tedy $x+y=\frac{2}{x^2-xy+y^2}\to 0$.
Závěr: Lokální/globální maximum je $f(1,1)=2$. Globální minimum neexistuje, globální infimum je 0.

25. $\nabla f=\lambda\nabla g$, $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=14 \implies \left|\begin{array}{c} 1=\lambda 2x \\ 2=\lambda 2y \\ 3=\lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2=14 \end{array}\right.$
Nelze mít $\lambda=0$, takže $x=\frac{1}{2\lambda}$, $y=\frac{1}{\lambda}$, $z=\frac{3}{2\lambda}$, dát do (#3), $\frac{14}{4\lambda^2}=14 \implies \lambda=\pm\frac{1}{2}$.
Možné lokální extrémy jsou $f(1,2,3)=14$, $f(-1,-2,-3)=-14$.
Podmínka $g=0$ definuje sféru, což je omezená uzavřená množina. Jediní kandidáti na globální extrémy jsou ty dvě hodnoty výše.
Závěr: Lokální/globální minimum je $f(-1,-2,-3)=-14$. Lokální/globální maximum je $f(1,2,3)=14$.

26. $\nabla f=\lambda\nabla g$, $g_1(x,y,z)=x^2+y^2=2$, $g_2(x,y,z)=x+y+z=0 \implies \left|\begin{array}{c} 1=\lambda 2x+\mu 1 \\ 1=\lambda 2y+\mu 1 \\ 0=\lambda\cdot 0+\mu 1 \\ x^2+y^2=2 \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$
Z (#3) je $\mu=0$, do prvních dvou, vyjde $y=x$. Dát do posledních dvou, $2x^2=2$, $2x+z=0$. Pak $x=\pm 1$ a $z=-2x$.
Možné lokální extrémy jsou $f(1,1,-2)=2$, $f(-1,-1,2)=-2$.

Množina definovaná podmínkami je omezená. Z první totiž máme $|x| \le 2$ a $|y| \le 2$, pak druhá dává $|z| \le 4$. Jediní kandidáti na globální extrémy jsou ty dvě hodnoty výše.
Závěr: Lokální/globální minimum je $f(-1,-1,2) = -2$. Lokální/globální maximum je $f(1,1,-2) = 2$.

27. $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 = 5$, $g_2(x,y,z) = x + 2y + z = 0 \implies \left|\begin{array}{c} 4 = \lambda 2x + \mu 1 \\ 0 = \lambda 2y + \mu 2 \\ 2 = \lambda \cdot 0 + \mu 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ x + 2y + z = 0 \end{array}\right.$

Z (#3) je $\mu = 2$, do prvních dvou, vyjde $\lambda x = 1$, $\lambda y = -2$. To dává $y = -2x$, dát do posledních dvou, $5x^2 = 5$, $-3x + z = 0$. Pak $x = \pm 1$ a $z = 3x$.
Možné lokální extrémy jsou $f(1,-2,3) = 10$, $f(-1,2,-3) = -10$.
Množina definovaná podmínkami je omezená. Z první totiž máme $|x| \le \sqrt{5}$ a $|y| \le \sqrt{5}$, pak druhá dává $|z| \le 3\sqrt{5}$. Jediní kandidáti na globální extrémy jsou ty dvě hodnoty výše.
Závěr: Lokální/globální minimum je $f(-1,2,-3) = -10$. Lokální/globální maximum je $f(1,-2,3) = 10$.

28. $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g_1(x,y,z) = x + y = 0$, $g_2(x,y,z) = x^2 - z = 0 \implies \left|\begin{array}{c} 2xy = \lambda 1 + \mu 2x \\ x^2 = \lambda 1 + \mu \cdot 0 \\ 3 = \lambda \cdot 0 + \mu(-1) \\ x + y = 0 \\ x^2 - z = 0 \end{array}\right.$

Z (#3) je $\mu = -3$, do prvních dvou, vyjde $2xy = \lambda - 6x$, $x^2 = \lambda$. To dává $2xy = x^2 - 6x$. Z (#3) je $y = -x$, takže poslední zní $0 = 3x^3 - 6x \implies x = 0, 2$.
Možné lokální extrémy jsou $f(0,0,0) = 0$, $f(2,-2,4) = 4$.
Množina definovaná podmínkami není omezená. Lze snadno poslat $x \to \infty$, pak podle první podmínky $y \to -\infty$ a podle druhé $z \to \infty$. Pomocí druhé pomdínky dostáváme $f(x,y,z) = x^2(y+3)$, tedy $f \to -\infty$. Podobně pokud necháme $x \to -\infty$, tak $y \to \infty$ a $f \to \infty$.
Závěr: Lokální minimum je $f(0,0,0) = 0$. Lokální maximum je $f(2,-2,4) = 4$. Není globální maximum ani minimum. Globální supremum je nekonečno, globální infimum je mínus nekonečno.

29. Nejprve najdeme lokální extrémy vzhledem k dané množině. $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g(x,y) = xy = 32 \implies$
$\left|\begin{array}{c} 2(x-2) = \lambda y \\ 2(y-16) = \lambda x \\ xy = 32 \end{array}\right.$

Protože $x, y \ne 0$, můžeme udělat $\frac{x-2}{y} = \frac{\lambda}{2} = \frac{y-16}{x} \implies x(x-2) = y(y-16)$. Z (#3) použijeme $y = \frac{32}{x}$, dostaneme $x(x-2) = \frac{32\cdot 16}{x^2}(2-x)$. Jestliže $x \ne 2$, pak zkrátíme, $x^3 = -32 \cdot 16 \implies x = -8$. Toto není ve zkoumané množině, takže nás to nezajímá.
Jestliže $x = 2$, pak $y = 16$, dostáváme podezřelý bod $f(2,16) = 0$.
Další podezřelé body jsou krajní body: $f(1,32) = 257$, $f\big(12, \frac{8}{3}\big) = 277 + \frac{7}{9}$.
Závěr: Globální minimum je $f(2,16) = 0$, globální maximum je $f\big(12, \frac{8}{3}\big) = 277 + \frac{7}{9}$.

30. Nejprve najdeme lokální extrémy vzhledem k dané množině. $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g(x,y) = xy = 4 \implies$
$\left|\begin{array}{c} 2(x+2) = \lambda y \\ 2(y+2) = \lambda x \\ xy = 4 \end{array}\right.$

Protože $x, y \ne 0$, můžeme udělat $\frac{x+2}{y} = \frac{\lambda}{2} = \frac{y+2}{x} \implies x(x+2) = y(y+2)$. Z (#3) použijeme $y = \frac{4}{x}$, dostaneme $x(x+2) = \frac{8}{x^2}(2+x)$. Daný rozsah je $x \ge 1$, takže $x \ne -2$ a lze zkrátit, $x^3 = 8 \implies x = 2$. Podezřelý bod $f(2,2) = 32$.
Další podezřelé body jsou krajní body: $f(1,4) = 45$, $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f\big(x, \frac{4}{x}\big)\big) = \infty$.
Závěr: Globální minimum je $f(2,2) = 32$, globální maximum neexistuje, supremum je nekonečno.

31. Nejprve najdeme lokální extrémy vzhledem k dané množině. $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g(x,y,z) = x + y + z^2 = 5 \implies \left|\begin{array}{c} yz = \lambda 1 \\ xz = \lambda 1 \\ xy = \lambda 2z \\ x + y + z^2 = 5 \end{array}\right.$

Z prvních dvou máme $yz = xz$, díky $z > 0$ máme $x = y$. Dostáváme $xz = \lambda$, $x^2 = 2\lambda z$, tedy $x^2 = 2xz^2$, tj. $x = 2z^2$. Dosadíme do podmínky, $2z^2 + 2z^2 + z^2 = 5 \implies z = \pm 1$, ale $z > 0$ tedy $z = 1$.
Podezřelý bod $f(2,2,1) = 4$.

Co víme o M? Je to omezená množina, protože z $x,y,z>0$ a podmínky máme $x,y,z<5$. Proto f nemůže utéct do nekonečna. Můžeme mít $x\to 0^+$ (například s $z=2$, $y=1-x$), pak $f\to 0$. Nedokážeme ale mít $f=0$ s $x,y,z>0$.
Závěr: Globální maximum je $f(2,2,1)=4$, globální minimum neexistuje, infimum je 0.

32. M je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(3,0)$, a $(0,3)$.
1) Vnitřek. Stacionární body:
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=4x-2y-2=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=-2x+2y=0\end{aligned}\right\}\implies x=y=1.\ (1,1)\in M,\text{ tedy první kandidát: } f(1,1)=-1.$$
2) Hranice. Rohy: $f(0,0)=0$, $f(3,0)=12$, $f(0,3)=9$.
Ted části:
2a) $x=0$, $y\in\langle 0,3\rangle$ (svislá strana). Uvažujme $\varphi(y)=f(0,y)=y^2$ na $\langle 0,3\rangle$, koncové body viz 2), $\varphi'(y)=0\implies y=0$, $(0,0)$ už zahrnuto.
2b) $y=0$, $x\in\langle 0,3\rangle$ (vodorovná strana). Uvažujme $\varphi(x)=f(x,0)=2x^2-2x$ na $\langle 0,3\rangle$, koncové body viz 2), $\varphi'(x)=0\implies x=\frac12$. Kandidát $f\bigl(\frac12,0\bigr)=-\frac12$.
2c) $y=3-x$, $x\in\langle 0,3\rangle$ (šikmá strana). Lagrangeovy multiplikátory s $g(x,y)=x+y=3$: $\left|\begin{aligned}4x-2y-2&=\lambda 1\\ -2x+2y&=\lambda 1\\ x+y&=3\end{aligned}\right.$
Z prvních dvou $4x-2y-2=-2x+2y\implies 6x-4y=2$, sečíst se čtyřnásobkem podmínky: $10x=14\implies x=\frac75$, pak $y=\frac85$. Kandidát $f\bigl(\frac75,\frac85\bigr)=\frac{16}{5}$.
Alternativa: Uvažujme $\varphi(x)=f(x,3-x)=5x^2-14x+9$ na $\langle 0,3\rangle$. Koncové body viz 2), $\varphi'(x)=0\implies x=\frac75$.
Porovnání kandidátů dává: $f(1,1)=-1$ je minimum na M, $f(3,0)=12$ je maximum na M.

33. $f(x,y,z)=x-xy-z^2,\quad M=\{(x,y,z)\in I\!R^3;\ x^2+y^2+z^2\le 3\}$. M je a ball with radius $\sqrt5$.
1) Vnitřek. Stacionární body:
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=1-y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=-x=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}&=-2z=0\end{aligned}\right\}\implies x=z=0,y=1.\ (0,1,0)\in M,\text{ hence the first candidate: } f(0,1,0)=0.$$
2) Hranice:
$$\nabla f=\lambda\nabla g,\ g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=3\implies\left|\begin{aligned}1-y&=\lambda 2x\\ -x&=\lambda 2y\\ -2z&=\lambda 2z\\ x^2+y^2+z^2&=3\end{aligned}\right.$$
Třetí rovnice nabízí dvě možnosti.
a) Případ $z=0$. Pak máme systém $\left|\begin{aligned}1-y&=\lambda 2x\\ -x&=\lambda 2y\\ x^2+y^2&=3\end{aligned}\right.$
Jestliže $x=0$, pak z (#1) $y=1$, ale to je ve sporu s podmínkou, podobně není možné $y=0$. Proto z (#1), (#2) je $\frac{1-y}{x}=2\lambda=\frac{-x}{y}\implies y-y^2=-x^2\implies x^2-y^2+y=0$. Odečteme od podmínky, $2y^2-y=3$. Proto $y=-1,\frac32$. Dva kandidáti, $f\bigl(\sqrt2,-1,0\bigr)=2\sqrt2$, $f\bigl(\frac{\sqrt3}{2},\frac32,0\bigr)=-\frac{\sqrt3}{4}$.
b) Případ $\lambda=-1$. První dvě rovnice pak zní $y=2x+1$, $2y=x$, tedy $x=-\frac23$, $y=-\frac13$. Podmínka pak dává $z=\pm\frac{\sqrt{22}}{3}$. Máme další dva kandidáty: $f\bigl(-\frac23,-\frac13,\frac{\sqrt{22}}{3}\bigr)=-\frac{26}{9}$, $f\bigl(-\frac23,-\frac13,-\frac{\sqrt{22}}{3}\bigr)=-\frac{26}{9}$.
Porovnání kandidátů dává: $f\bigl(\sqrt2,-1,0\bigr)=2\sqrt2$ je maximum na M, $f\bigl(-\frac23,-\frac13,\pm\frac{\sqrt{22}}{3}\bigr)=-\frac{26}{9}$ dává minimum na M.

34. M je špička hyperboly odříznutá přímkou, průsečíky jsou $(5,4)$, $(5,-4)$.
1) Vnitřek. Stacionární body:
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=2x-8=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=2y=0\end{aligned}\right\}\implies x=4,y=0.\ (4,0)\in M,\text{ proto první kandidát: } f(4,0)=-16.$$
2) Hranice. Rohy: $f(5,\pm4)=1$.
Teď části:
2a) $x=5$, $y\in\langle -4,4\rangle$ (svislá strana). Uvažujme $\varphi(y)=f(5,y)=y^2-15$ na $\langle -4,4\rangle$, koncové body viz 2), $\varphi'(y)=0\implies y=0$, další kandidát $f(5,0)=-15$.

2b) $x^2 - y^2 = 9$, $x \in \langle 3,5\rangle$, $y \in \langle -4,4\rangle$ (hyperbolická strana). Lagrangeovy multiplikátory: $\left|\begin{array}{c} 2x-8=\lambda 2x \\ 2y=\lambda(-2y) \\ x^2-y^2=9 \end{array}\right.$

Jedna možnost $y=0$, pak $x=3$, kandidát $f(3,0)=-15$.
Jestliže $y\neq 0$, pak z (#2) $\lambda=-1$, (#1) dává $x=2$, není v M.
Porovnání kandidátů dává: $f(4,0)=-16$ je minimum na M, $f(5,\pm 4)=1$ dává maximum na M.

35. $f(x,y)=x^2+2x+y^2$, M je tři čtvrtiny kruhu s kouskem uříznutým přímkou, průsečíky jsou $(-2,\sqrt{5})$, $(2,\sqrt{5})$.
1) Vnitřek. Stacionární body:
$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}=2x+2=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y=0 \end{array}\right\} \implies x=-1, y=0.$ $(-1,0)\in M$, proto první kandidát: $f(-1,0)=-1$.
2) Hranice. Rohy: $f\big(-2,\pm\sqrt{5}\,\big)=5$.
Teď části:
2a) $x=-2$, $y\in\big\langle -\sqrt{5},\sqrt{5}\big\rangle$ (svislá strana). Consider $\varphi(y)=f(-2,y)=y^2$ na $\big\langle -\sqrt{5},\sqrt{5}\big\rangle$, koncové body viz 2),
$\varphi'(y)=0 \implies y=0$, další kandidát $f(-2,0)=0$.

2b) $x^2+y^2=9$, $x\in\langle -2,3\rangle$, $y\in\langle -3,3\rangle$ (kruhová část). Lagrangeovy multiplikátory: $\left|\begin{array}{c} 2x+2=\lambda 2x \\ 2y=\lambda 2y \\ x^2+y^2=9 \end{array}\right.$

Jedna možnost $y=0$, pak $x=3$, kandidát $f(3,0)=15$.
Jestliže $y\neq 0$, pak z (#2) $\lambda=1$, (#1) dává $2=0$, nemožné.
Porovnání kandidátů dává: $f(-1,0)=-1$ je minimum na M, $f(3,0)=15$ dává maximum na M.

36. Vezměme libovolný bod $Q(x,y,z)$ z plochy, chceme minimalizovat $f(x,y,z)=\mathrm{dist}(0,Q)^2=x^2+y^2+z^2$.
Podmínka: $g(x,y,z)=x^2-z^2=1$.

Lagrangeovy multiplikátory: $\left|\begin{array}{c} 2x=\lambda 2x \\ 2y=\lambda\cdot 0 \\ 2z=\lambda(-2z) \\ x^2-z^2=1 \end{array}\right.$

Druhá dává $y=0$. První nabízí dvě možnosti.
Případ $x=0$: Pak $-z^2=1$, nemožné.
Případ $\lambda=1$: pak (#3) dává $z=0$, podmínka dává $x=\pm 1$. Kandidáti $Q(\pm 1,0,0)$.
Protože vzdálenost jde do nekonečna, když necháme $y\to\infty$, našli jsme minimizující body. Jejich vzdálenost od počátku je 1.
Odpověď: Nejbližší body jsou $Q(\pm 1,0,0)$.

Poznámka: Často se dává přednost použití podmínky ke snížení počtu proměnných.
a) Vyjádříme $z^2=x^2-1$. Dosadíme do f, chceme minimalizovat funkci $h(x,y)=2x^2+y^2-1$. Lokální extrémy:
$\frac{\partial f}{\partial x}=2x=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y=0 \implies x=y=0$, minimalizovali jsme h, ale bohužel to není bod, který leží na dané hyperbolické ploše! Toto řešení tedy nefunguje.
Abychom to rozchodili, museli bychom si všimnout, že plocha nutí x, aby splňovalo $|x|\geq 1$, takže je možné zkusit minimalizovat $h(x,y)$ za těchto podmínek.
b) Vyjádříme si $x^2=z^2+1$. Dosadíme do f, chceme minimalizovat funkci $h(y,z)=y^2+2z^2+1$. Lokální extrémy: Zde najdeme $y=z=0$, které dávají správnou odpověď.

37. Vezměme libovolný bod $Q(x,y,z)$ z povrchu, chceme minimalizovat $f(x,y,z)=\mathrm{dist}(0,Q)^2=x^2+y^2+z^2$. Podmínka: $g(x,y,z)=xy-z=-1$.

Lagrangeovy multiplikátory: $\left|\begin{array}{c} 2x=\lambda y \\ 2y=\lambda x \\ 2z=\lambda(-1) \\ xy-z=-1 \end{array}\right.$

Dosadíme y z druhé do první, $4x=\lambda^2 x$. Dva případy.
a) Případ $x=0$. Pak také $y=0$ a podmínka dává $(0,0,1)$.
b) Případ $\lambda=2$. Pak $y=x$ a (#3) dává $z=-1$, podmínka vychází $x^2=-2$, nemožné.
Je jeden kandidát, jeho vzdálenost od počátku je 1. DOkážeme zvětšovat vzdálenost do nekonečna s body z dané plochy, takže jsme našli minimum.
Odpověď: Nejbližší bod je $Q(0,0,1)$.

38. Potřebujeme vzít bod (s,t) z jedné křivky a bod (u,v) z druhé křivky a minimalizovat jejich vzdálenost, pro jednoduchost budeme minimalizovat druhou mocninu jejich vzdálenosti, $f(s,t,u,v) = (s-u)^2 + (t-v)^2$.
Podmínky: $g_1(s,t,u,v) = t - s = 1$ a $g_2(s,t,u,v) = u - v^2 = 0$.

$$\left|\begin{array}{c} 2(s-u) = \lambda(-1) + \mu\cdot 0 \\ 2(t-v) = \lambda\cdot 1 + \mu\cdot 0 \\ -2(s-u) = \lambda\cdot 0 + \mu\cdot 1 \\ -2(t-v) = \lambda\cdot 0 + \mu(-2v) \\ t-s=1 \\ u-v^2=0 \end{array}\right. \implies \left|\begin{array}{c} 2(s-u) = -\lambda \\ 2(t-v) = \lambda \\ 2(s-u) = -\mu \\ 2(t-v) = 2\mu v \\ t-s=1 \\ u-v^2=0 \end{array}\right.$$

Porovnáme (#1) a (#3), $\lambda = \mu$, z (#2) a (#4) $\lambda = 2\mu v$, takže $\mu = 2\mu v$. Dvě možnosti.
a) Případ $\mu = 0$: $s = u$, $t = v$, takkže $t - s = 1$ a $s = t^2$, $t^2 - t + 1 = 0$ nemá řešení. Proto $\mu \neq 0$.
b) Případ $\mu \neq 0$. Pak $v = \frac{1}{2}$, proto $u = \frac{1}{4}$. Dostáváme $2\bigl(s - \frac{1}{4}\bigr) = -\lambda$, $2\bigl(t - \frac{1}{2}\bigr) = \lambda$, tedy $s = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}$, $t = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}$. Dosadíme do podmínky, $\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4} = 1$, proto $\lambda = \frac{3}{4}$, $s = -\frac{1}{8}$, $t = \frac{7}{8}$.
Našli jsme body $\bigl(-\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\bigr)$ a $\bigl(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\bigr)$. Jejich vzdálenost je $\frac{3}{8}\sqrt{2}$.