

MA2: Cvičné příklady—Funkce více proměnných: Integrály

Pro následující funkce f a oblasti Ω sestavte a vypočtěte integrál $\iint_{\Omega} f \, dA$.

1. $f(x, y) = 6xy + 2x + 2y, \quad \Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle,$

2. $f(x, y) = 3 \sin(3x + y), \quad \Omega = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle,$

3. $f(x, y) = x \sin(xy), \quad \Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle,$

4. $f(x, y) = x^2 y e^{xy}, \quad \Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle,$

5. $f(x, y) = \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad \Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle,$

6. $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2}, \quad \Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, \infty \rangle,$

7. $f(x, y) = e^{-x-y}, \quad \Omega = \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, \infty \rangle,$

8. $f(x, y) = 3x^3 e^{xy},$

Ω je omezená oblast vymezená $y = x^2$ a $y = 1$,

9. $f(x, y) = x^2 \sin(xy),$

Ω je omezená oblast vymezená $y = \pi x$ a $y = 2\pi x$ pro $1 \leq x \leq 2$,

10. $f(x, y) = 9y,$

Ω je omezená oblast vymezená $x^2 + y^2 = 5$ a $y = 3x - 5$ zahrnující $(2, 0)$,

11. $f(x, y) = 9x,$

Ω je omezená oblast vymezená $y = x$, $3y - x = 2$ a $x + y = 6$,

12. $f(x, y) = 4e^{y^2} + 8xy,$

Ω je omezená oblast vymezená $x = 0$, $y = 2$ a $y = 2x$,

13. $f(x, y) = \frac{y}{x},$

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\},$

14. $f(x, y) = e^{-(x+y)},$

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq y\},$

15. $f(x, y) = \frac{1}{x},$

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1, xy^2 \leq 1\}.$

16. Vypočítejte následující integrál, pak změňte pořadí integrace a znovu jej vypočítejte:

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} xy \, dy \, dx.$$

V následujících integrálech změňte pořadí integrace.

17. $\int_0^1 \int_{\arcsin(y)}^{\pi y/2} f(x, y) \, dx \, dy,$

18. $\int_1^{\infty} \int_0^{1/x} f(x, y) \, dy \, dx,$

19. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx,$

20. $\int_0^1 \int_0^x f(x, y) \, dy \, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) \, dy \, dx,$

21. $\int_0^1 \int_0^{3x^2} f(x, y) \, dy \, dx + \int_1^4 \int_{x-1}^3 f(x, y) \, dy \, dx.$