

MA2: Řešené příklady—Funkce více proměnných: Derivace a geometrie

1. Najděte definiční obor a všechny parciální derivace prvního řádu funkce

$$f(x, y, z) = \arcsin(xy)e^{3z} + (x+z)^{y+z}.$$

2. Najděte definiční obor a všechny parciální derivace druhého řádu funkce

$$f(x, y) = x^2y + (3x + 5y)^2.$$

Najděte všechny derivace přímo, nepoužívejte žádnou větu.

3. Uvažujte funkci $f(x, y, z) = \frac{xyz}{\sqrt{x+y}} + e^{2x-z}$.

Najděte její gradient $\nabla f(1, 0, 2)$ a totální diferenciál v bodě $(1, 0, 2)$.

4. Uvažujte funkci $f(x, y) = xy^2 + x^2y + 2x - y$. Jsme v bodě $(1, 2)$.

a) V jakém směru klesá f nejrychleji? Jakou rychlostí?

b) Pokud se pohneme směrem k bodu $(3, 2)$, jakou rychlostí se začnou měnit hodnoty funkce f ?

5. Najděte rovnici tečné roviny a normály v bodě $(1, 1, 2)$ k povrchu danému rovnicí

$$z^2 = 7 - x^2 - 2y^2.$$

6. Najděte rovnici tečny a normály v bodě $(0, 5\pi/6)$ ke křivce dané rovnicí

$$2 \sin(y) - \sin(x) = 1.$$

Napište rovnice v klasickém tvaru.

7. Použijte totální diferenciál k aproximaci $\ln(1.1) \cos(0.3)$.

8. Najděte Taylorův polynom třetího stupně se středem $\vec{a} = (1, -1, 1)$ k funkci

$$f(x, y, z) = 2xy^2 + xz^3.$$

9. Nechť je $f(x, y)$ nějaká funkce. Uvažujte transformaci proměnných $x = \sqrt{s}$, $y = t/s$.

a) Najděte $\frac{\partial f}{\partial s}$ a $\frac{\partial f}{\partial t}$.

b) Transformujte výrazy $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(Přesně řečeno, vyjádřete je pomocí parciálních derivací f vzhledem k s a t .)

c) Transformujte výraz $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

10. Uvažujte rovnici $\sin(xy) + x^2 + y^2 = 1$.

a) Dokažte, že na nějakém okolí $(0, 1)$ tato rovnice definuje implicitní funkci $y(x)$.

b) Najděte rovnici tečny ke grafu této y v bodě $(0, 1)$.

c) Najděte $y''(0)$.

11. Uvažujte rovnici $\sin(xz) + \sin(yz) = \sin(xy)$.

a) Dokažte, že na nějakém okolí bodu $(0, 1, \pi)$ tato rovnice definuje implicitní funkci $z(x, y)$.

b) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu této z v bodě $(0, 1, \pi)$.

c) Najděte $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 1, \pi)$.

Řešení:

1. K nalezení definičního oboru musíme nejprve přepsat obecnou mocninu v druhém členu:

$$f(x, y, z) = \arcsin(xy)e^{3z} + e^{(y+z)\ln(x+z)}.$$

Podmínky pro existenci jsou proto $-1 \leq xy \leq 1$ a $x + z > 0$:

$$D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -1 \leq xy \leq 1 \text{ a } z > -x\}.$$

K získání parciální derivace podle x předstíráme, že y, z jsou konstanty. Co z toho plyne? První člen je součin, ale jeho druhá část závisí jen na z , takže celá exponenciální část je konstanta a lze ji z derivace vytáhnout. Při derivování první složky součinu použijeme řetízkové pravidlo (složená funkce). V druhém členu je proměnná x jen v základu, takže není třeba používat trik pro obecnou mocninu, aplikujeme vzorec pro $[x^a]'$. Ono to ale není přesně takto, je tam v základu funkce, takže zase aplikujeme řetízkové pravidlo. Připomínáme, že derivace konstanty je nula a $[Ax]' = A$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^{3z} \frac{\partial}{\partial x} [\arcsin(xy)] + (y+z)(x+z)^{y+z-1} \frac{\partial}{\partial x} [x+z] \\ &= \frac{e^{3z}}{\sqrt{1-(xy)^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [xy] + (y+z)(x+z)^{y+z-1} \cdot [1+0] = \frac{ye^{3z}}{\sqrt{1-x^2y^2}} + (y+z)(x+z)^{y+z-1}. \end{aligned}$$

Teď předstíráme, že x, z jsou konstanty. První člen se derivuje obdobně, ale druhý je teď ve tvaru a^{y+b} , takže je třeba použít pravidlo pro derivování obecné exponenciály. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{3z} \frac{\partial}{\partial y} [\arcsin(xy)] + \ln(x+z)(x+z)^{y+z} \frac{\partial}{\partial y} [y+z] \\ &= \frac{e^{3z}}{\sqrt{1-(xy)^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} [xy] + \ln(x+z)(x+z)^{y+z} \cdot [1+0] = \frac{xe^{3z}}{\sqrt{1-x^2y^2}} + \ln(x+z)(x+z)^{y+z}. \end{aligned}$$

Nakonec předstíráme, že x, y jsou konstanty. V druhém členu teď máme proměnnou z jak v základu tak v exponentu mocniny, takže je třeba použít přepis pro obecnou mocninu, jak jsme jej měli při hledání definičního oboru, a derivovat složenou funkci $\frac{\partial}{\partial z}[e^{\varphi(z)}] = e^{\varphi(z)} \frac{\partial}{\partial z}[\varphi(z)]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \arcsin(xy) \frac{\partial}{\partial z} (e^{3z}) + e^{(y+z)\ln(x+z)} \cdot \frac{\partial}{\partial z} [(y+z)\ln(x+z)] \\ &= \arcsin(xy) 3e^{3z} + (x+z)^{y+z} \left([1+0]\ln(x+z) + \frac{1}{x+z} \frac{\partial}{\partial z} [y+z] \right) \\ &= 3\arcsin(xy)e^{3z} + (x+z)^{y+z} \left(\ln(x+z) + \frac{y+z}{x+z} \right). \end{aligned}$$

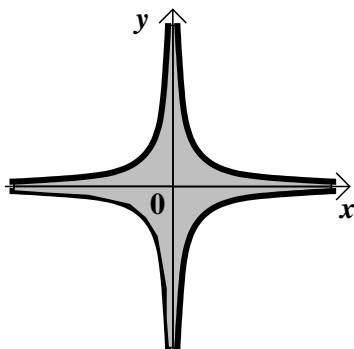
Poznámka ohledně definičního oboru (pro zvědavé studenty):

Jaký je tvar množiny $D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -1 \leq xy \leq 1 \text{ a } z > -x\}$?

V první podmínce naštěstí není z , takže můžeme začít vyšetřovat, jaký tvar nám definuje v rovině xy . Při dešifrování podmínky $-1 \leq xy \leq 1$ musíme uvažovat tři možnosti:

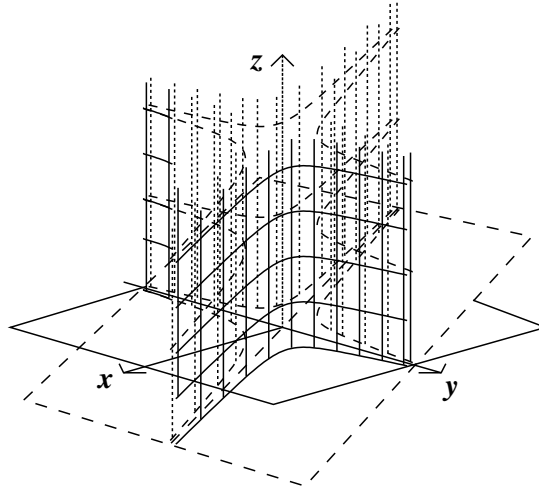
$$\begin{aligned} x = 0 &: & -1 \leq 0 \leq 1 \text{ vždy} &\implies \text{všechna } y \text{ fungují.} \\ x > 0 &: & -\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x} \\ x < 0 &: & -\frac{1}{x} \geq y \geq \frac{1}{x} \implies \frac{1}{x} \leq y \leq -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Máme tedy následující tvar v \mathbb{R}^2 :



Definiční obor je nicméně třídimenzionální objekt, víme, že je to něco vztyčené nad množinou v obrázku výše. Kdyby tam nebyly žádné další podmínky, pak by z mohlo být libovolné a dostali bychom něco jako nekonečný svislý „válec“ s průřezem daným tvarem výše.

My ale máme podmínku, jmenovitě $z > -x$. Tato podmínka omezuje z zdola v závislosti na pozici v rovině xy . Rovnice $z = -x$ definuje rovinu skloněnou pod úhlem 45 stupňů, rovnoběžnou s z a procházející osou y . Definiční obor $D(f)$ je proto ta část onoho „nekonečného válce“, která leží nad touto rovinou.



2. Protože ve vzorcích nejsou žádné problémy, máme $D(f) = \mathbb{R}^2$.

Abychom dostali parciální derivace druhého řádu, musíme nejprve spočítat ty prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial x}[x^2] + 2(3x + 5y) \frac{\partial f}{\partial x}[3x + 5y] = 2xy + 2(3x + 5y) \cdot 3 = 2xy + 18x + 30y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \frac{\partial f}{\partial x}[y] + 2(3x + 5y) \frac{\partial f}{\partial y}[3x + 5y] = x^2 + 2(3x + 5y) \cdot 5 = x^2 + 30x + 50y.$$

Proto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} [2xy + 18x + 30y] = 2y + 18,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial y} [2xy + 18x + 30y] = 2x + 30,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial x} [x^2 + 30x + 50y] = 2x + 30,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} [x^2 + 30x + 50y] = 50.$$

Všimněte si, že tato funkce má parciální derivace všech řádů a jsou spojité, takže podle věty musí být $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

3. To je snadné. Nejprve najdeme parciální derivace a pak do nich dosadíme daný bod:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz\sqrt{x+y} - \frac{xyz}{2\sqrt{x+y}}}{x+y} + 2e^{2x-z} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 2) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xz\sqrt{x+y} - \frac{xyz}{2\sqrt{x+y}}}{x+y} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 2) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy}{\sqrt{x+y}} - e^{2x-z} \implies \frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 2) = -1.$$

Teď již zformujeme gradient a totální diferenciál:

$$\nabla f(0, 2, 0) = \text{grad}(f)(0, 2, 0) = (2, 2, -1),$$

$$df(1, 0, 2) = 2dx + 2dy - dz \quad \text{nebo} \quad df(1, 0, 2)[\vec{h}] = 2h_1 + 2h_2 - h_3.$$

4. Obě otázky vyžadují znalost gradientu, takže najdeme příslušné parciální derivace a zpracujeme je:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2xy + 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2 - 1 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 10 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4 \end{array} \right\} \implies \nabla f(1, 2) = (10, 4).$$

Směr největšího spádu je $-\nabla f(1, 2)$, tedy $(-10, -4)$. Protože se směr nemění, když vektor vynásobíme (vydělíme) kladným číslem, lze také udat odpověď jako $\frac{1}{2}(-10, -4) = (-5, -2)$.

Rychlost změny ve směru gradientu je $\|\nabla f(1, 2)\| = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$. V opačném směru bude rychlost změny stejně velká, ale záporná. Rychlost změny ve směru $(-5, -2)$ je $-2\sqrt{29}$.

b) Nejprve určíme vektor udávající náš pohyb (změnu pozice), když jdeme z $(1, 2)$ do $(3, 2)$: $\vec{v} = (3, 2) - (1, 2) = (2, 0)$. Pak najdeme vektor ve stejném směru, ale s normou rovnou jedné:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{2}(2, 0) = (1, 0).$$

Odpověď na otázku b) je dána příslušnou směrovou derivací. Rychlost změny ve směru \vec{u} je

$$D_{\vec{u}}f(1, 2) = f'_{\vec{u}}(1, 2) = \nabla f(1, 2) \bullet \vec{u} = (10, 4) \bullet (1, 0) = 10.$$

5. Ověříme, že daný bod $P = (1, 1, 2)$ splňuje danou rovnici, takže otázka má smysl, bod opravdu leží na dané křivce. Abychom našli zadané objekty, potřebujeme nejprve najít normálový vektor k danému povrchu v bodě $(1, 1, 2)$. Jsou dva možné přístupy:

1) Můžeme ten povrch považovat za hladinu konstantnosti $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$ funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2.$$

Víme, že pak gradient dává normálový vektor k hladině konstantnosti. Najdeme tedy patřičné parciální derivace a dosadíme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z \\ \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 2) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 2) = 4. \end{aligned}$$

Proto $\nabla f(1, 1, 2) = (2, 4, 4)$. Protože za normálový vektor lze vzít libovolný násobek gradientu, pro zjednodušení vezmeme $\vec{n} = \frac{1}{2}\nabla f(1, 1, 2) = (1, 2, 2)$.

2) Můžeme ten povrch také považovat za graf jedné z funkcí

$$z = -\sqrt{7 - x^2 - 2y^2}, \quad z = +\sqrt{7 - x^2 - 2y^2}.$$

Musíme rozhodnout, která z těchto funkcí je pro náš problém relevantní, ale to je snadné, rychle zjistíme, že daný bod $(1, 1, 2)$ nevyhovuje první rovnici, ale druhá je v pohodě. Budeme tedy uvažovat funkci $g(x, y) = \sqrt{7 - x^2 - 2y^2}$.

Víme, že normálový vektor ke grafu lze nalézt jako $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, -1)$ vyhodnocený v bodě $(1, 1)$. Takže počítáme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{7 - x^2 - 2y^2}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-2y}{\sqrt{7 - x^2 - 2y^2}} \\ \implies \left(\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1), -1 \right) = \left(-\frac{1}{2}, -1, -1 \right). \end{aligned}$$

Protože můžeme jako \vec{n} vzít libovolný násobek tohoto vektoru (i záporný, opačný směr ke kolmému vektoru je pořád kolmý!), dáme přednost vynásobením číslem -2 a dostaneme $\vec{n} = (1, 2, 2)$ jako v 1). Poznamenejme, že tímto způsobem to nebylo tak snadné, což je typické. Přístup přes hladiny konstantnosti je obvykle přirozenější, někdy jediný možný.

Každopádně máme normálový vektor $\vec{n} = (1, 2, 2)$. *Normála* je dána parametrickou rovnicí

$$\vec{z}(t) = P + t\vec{n} = (1, 1, 2) + t(1, 2, 2) = (1 + t, 1 + 2t, 2 + 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Protože jsme ve třech dimenzích, alternativním způsobem vyjádření přímky je coby průnik dvou rovin. To ale není tak elegantní jako parametrické vyjádření, tak jsme se rozhodli to nedělat.

Tečná rovina daná normálovým vektorem $(1, 2, 2)$ musí splňovat rovnici

$$1 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z = d$$

pro nějaké d . To najdeme dosazením bodu $(1, 1, 2)$ do této rovnice, vyjde $d = 7$, takže rovnice je

$$x + 2y + 2z = 7.$$

Další možnost (má nejoblíbenější) je si pamatovat, že rovnice roviny kolmé na \vec{n} a procházející bodem P je dána vztahem

$$0 = \vec{n} \bullet [(x, y, z) - P] = 1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z - 2),$$

což samozřejmě vede na stejnou odpověď.

6. Ověříme, že bod $P = (0, \frac{5\pi}{6})$ splňuje danou rovnici, tudíž otázka má smysl. Jako obvykle potřebujeme nejprve najít normálový vektor \vec{n} . Křivka je dána rovnicí s dvěma neznámými, lze to tedy uvažovat jako problém najít \vec{n} k hladině konstantnosti dané funkcí

$$f(x, y) = 2 \sin(y) - \sin(x).$$

Z teorie víme, že kandidátem na takový vektor je gradient f , takže najdeme parciální derivace a dosadíme onen bod:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos(x), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cos(y) \quad \implies \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, \frac{5\pi}{6}) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, \frac{5\pi}{6}) = -2.$$

Dostáváme gradient $\nabla f(0, \frac{5\pi}{6}) = (-1, -2)$. Protože si jako normálový vektor můžeme vzít libovolný násobek tohoto gradientu, dáme přednost vektoru $\vec{n} = -\nabla f(0, \frac{5\pi}{6}) = (1, 2)$.

Teď už snadno napíšeme parametrickou rovnici *normály*:

$$\vec{z}(t) = P + t\vec{n} = (0, \frac{5\pi}{6}) + t(1, 2) = (t, \frac{5\pi}{6} + 2t).$$

Abychom dostali klasický tvar, eliminujeme t z výsledných rovnic $x = t$, $y = \frac{5\pi}{6} + 2t$, dostaneme nejprve $t = x$ a pak

$$y = 2x + \frac{5\pi}{6}.$$

Jsou dva způsoby, jak nalézt *tečnu*.

1) Jedna možnost je vidět ji jako přímku, která je kolmá na \vec{n} a jde daným bodem P . Takováto přímka splňuje rovnici

$$0 = \vec{n} \bullet [(x, y) - P] = 1 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - \frac{5\pi}{6}) \implies x + 2y = \frac{5\pi}{3}.$$

Někteří lidé si pamatují, že v takovémto případě máme $1 \cdot x + 2 \cdot y = c$ pro nějaké c . To pak najdou dosazením bodu $(0, \frac{5\pi}{6})$ do této rovnice, vyjde $c = \frac{5\pi}{3}$.

2) Ten druhý přístup začíná parametrickou rovnicí přímky. K tomu nejprve potřebujeme najít nějaký tečný vektor v bodě $(0, \frac{5\pi}{6})$. Protože známe normálový vektor $\vec{n} = (1, 2)$, použijeme populární dvoudimenzionální trik s prohozením souřadnic a přidáním jednoho mínusu, čímž dostaneme například $\vec{d} = (2, -1)$. Teď můžeme psát

$$\vec{z}(t) = P + t\vec{d} = (0, \frac{5\pi}{6}) + t(2, -1) = (2t, \frac{5\pi}{6} - t).$$

Abychom dostali klasický tvar, eliminujeme t z výsledných rovnic $x = 2t$, $y = \frac{5\pi}{6} - t$, dostaneme $t = x/2$ a pak

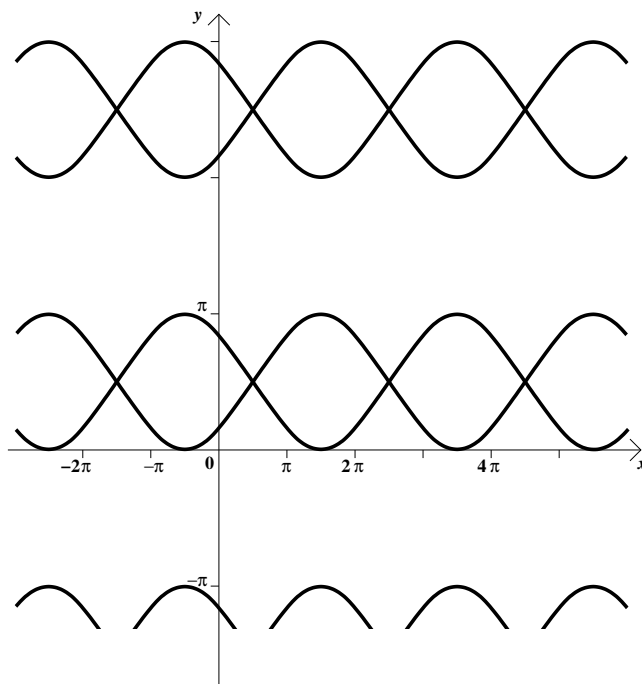
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5\pi}{6}.$$

Poznámka: Ověřte, že také bod $(\pi/2, \pi/2)$ leží na dané křivce. Co když zkusíme najít normálový vektor v tomto bodě?

Dosazení do parciálních derivací spočtených výše dává $\vec{n} = (0, 0)$ a problém nelze vyřešit. Proč tomu tak je? Důvodem je, že křivka popsaná rovnicí $2 \sin(y) - \sin(x) = 1$ je dosti komplikovaná, což před námi postup použitý výše laskavě ukryl. Na povrch by to vyšlo, pokud bychom zkusili tento problém z podoby „tečna k hladině konstantnosti“ převést na typ „tečna ke grafu funkce“. Když se pokusíme vyjádřit y z rovnice, dostáváme

$$\sin(y) = \frac{\sin(x)+1}{2}.$$

Pro dané x má tato rovnice nekonečně mnoho řešení y (popřípadě žádné řešení, pokud číslo napravo nepadne do $\langle -1, 1 \rangle$, ale to zde nenastane). Z toho, že možná řešení x a y se opakují s posuny o 2π , dostáváme, že křivka daná naší rovnicí je jeden určitý tvar, který se pak opakuje stále znovu a znovu ve směru x a také ve směru y s periodou 2π , dokonce tam jsou i zrcadlové obrazy! Toto vše plyne ze zamyšlení, kolik řešení má problém $\sin(y) = A$ a jak vypadají. Graf je takovýto:

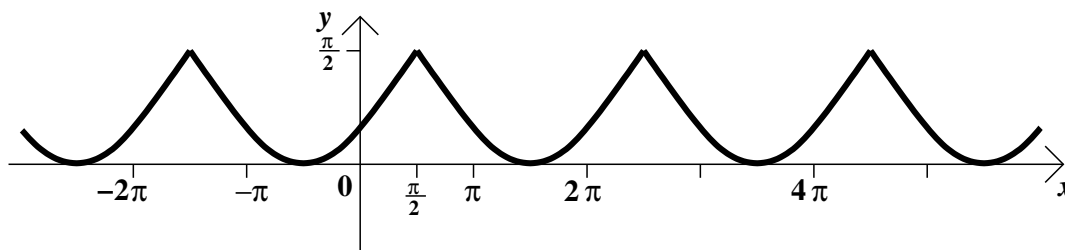


Hned vidíte, že v bodě $(0, 5\pi/6)$ má daná otázka smysl a lze ji vyřešit, ale v bodě $(\pi/2, \pi/2)$ tato křivka prochází dvěma směry, tudíž nemá smysl se ptát na tečnu.

Všimněte si také, že kdybyste se naivně pokusili vyjádřit y pomocí arkus sinusu:

$$y = \arcsin\left(\frac{\sin(x)+1}{2}\right) = f(x),$$

tak byste dostali onu „základní“ křivku, která vypadá jako moře a jejíž kopie a zrcadlení dávají kompletní graf výše:



Tato křivka dokonce ani neobsahuje daný bod $(0, 5\pi/6)$, takže danou otázku nelze pomocí tohoto f řešit.

7. Budeme pracovat s funkcí $f(x, y) = \ln(x) \cos(y)$. Číslo $\ln(1.1) \cos(0.3)$, které chceme aproximovat, teď můžeme vyjádřit jako $f(1.1, 0.3)$. Všimněme si, že $(1.1, 0.3)$ je velmi blízko k $(1, 0)$, a

funkce f je v bodě $(1, 0)$ mnohem hezčí, což je základem pro naši aproximaci. Pojem totálního diferenciálu nám umožňuje odhadovat

$$f(1.1, 0.3) = f((1, 0) + (0.1, 0.3)) \sim f(1, 0) + df(1, 0)[(0.1, 0.3)] = f(1, 0) + \nabla f(1, 0) \bullet (0.1, 0.3).$$

Spočítáme

$$\nabla f(1, 0) = \left(\frac{\cos(y)}{x}, -\ln(x) \sin(y) \right) \Big|_{(1,0)} = (1, 0).$$

Proto

$$\ln(1.1) \cos(0.3) \sim \ln(1) \cos(0) + (1, 0) \bullet (0.1, 0.3) = 0.1.$$

Mimochodem, přesná hodnota je $\ln(1.1) \cos(0.3) = 0.091\dots$, takže naše aproximace je dost dobrá.

$$8. \text{ Víme, že } T(\vec{x}) = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} d^k f(\vec{a})[\vec{x} - \vec{a}] = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} ((\vec{x} - \vec{a}) \bullet \nabla)^k f(\vec{a}).$$

Potřebujeme tedy spočítat ony diferenciální výrazy, pro zjednodušení budeme nejprve psát \vec{h} namísto $\vec{x} - \vec{a}$. Víme, že $d^0 f = f$, a

$$\begin{aligned} df[\vec{h}] &= (\vec{h} \bullet \nabla) f = \left(h_x \frac{\partial}{\partial x} + h_y \frac{\partial}{\partial y} + h_z \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \frac{\partial f}{\partial x} h_x + \frac{\partial f}{\partial y} h_y + \frac{\partial f}{\partial z} h_z \\ d^2 f[\vec{h}] &= (\vec{h} \bullet \nabla)^2 f = \left(h_x \frac{\partial}{\partial x} + h_y \frac{\partial}{\partial y} + h_z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f \\ &= \left(h_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + h_y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h_z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2h_x h_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2h_x h_z \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2h_y h_z \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right) f \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h_x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h_y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} h_z^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h_x h_y + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} h_x h_z + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} h_y h_z \\ d^3 f[\vec{h}] &= (\vec{h} \bullet \nabla)^3 f = \left(h_x \frac{\partial}{\partial x} + h_y \frac{\partial}{\partial y} + h_z \frac{\partial}{\partial z} \right)^3 f \\ &= \left(h_x^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + h_y^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3} + h_z^3 \frac{\partial^3}{\partial z^3} + 3h_x^2 h_y \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3h_x h_y^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + 3h_x^2 h_z \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} \right. \\ &\quad \left. + 3h_x h_z^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2} + 3h_y^2 h_z \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial z} + 3h_y h_z^2 \frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2} + 6h_x h_y h_z \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \right) f \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h_x^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} h_y^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} h_z^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} h_x^2 h_y + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} h_x h_y^2 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} h_x^2 h_z \\ &\quad + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2} h_x h_z^2 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} h_y^2 h_z + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2} h_y h_z^2 + 6 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} h_x h_y h_z \end{aligned}$$

Teď si spočítáme potřebné parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2y^2 + z^3, & \frac{\partial f}{\partial y} &= 4xy, & \frac{\partial f}{\partial z} &= 3xz^2; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 4x, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 6xz, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 4y, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= 3z^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 0, & \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} &= 4, & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} = 0, \\ & \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x} &= 6z, & \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y} &= 0, & \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} &= 6x. \end{aligned}$$

Dosadíme do nich bod $\vec{a} = (1, -1, 1)$ a pak je dáme do oněch vzorců pro totální diferenciály:

$$\begin{aligned} d^0 f(1, -1, 1)[\vec{h}] &= f(1, -1, 1) = 3, \\ df(1, -1, 1)[\vec{h}] &= 3h_x - 4h_y + 3h_z, \\ d^2 f(1, -1, 1)[\vec{h}] &= 4h_y^2 + 6h_z^2 - 8h_x h_y + 6h_x h_z, \\ d^3 f(1, -1, 1)[\vec{h}] &= 6h_z^3 + 18h_x h_z^2 + 12h_y^2 h_z. \end{aligned}$$

Nakonec dosadíme $\vec{h} = (x - 1, y + 1, z - 1)$ a vytvoříme Taylorův polynom:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= 3 + 3(x - 1) - 4(y + 1) + 3(z - 1) + 2(y + 1)^2 + 3(z - 1)^2 - 4(x - 1)(y + 1) \\ &\quad + 3(x - 1)(z - 1) + (z - 1)^3 + 3(x - 1)(z - 1)^2 + 2(y + 1)^2(z - 1). \end{aligned}$$

9. Po transformaci dostaneme novou funkci $f(s, t)$.

a) K derivování podle s je třeba si uvědomit, že po provedení transformace se ve výrazu $f(x, y)$

proměnná s vyskytuje jak v x tak v y , máme $f(x(s, t), y(s, t))$. Obecné řetízkové pravidlo říká, že musíme prozkoumat obě možnosti, jak se k s dostat. Podobně derivujeme vzhledem k t .

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2\sqrt{s}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{-t}{s^2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 0 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

b) Tato otázka se dá zodpovědět dvěma možnými způsoby.

1) Obě derivace, které hledáme, jsou přítomny v oněch dříve odvozených rovnicích

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{t}{s^2} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

a my pro ně dokážeme tento systém vyřešit, dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial y} = s \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2\sqrt{s} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{2t}{\sqrt{s}} \frac{\partial f}{\partial t}.$$

2) Druhý přístup funguje obrácením postupu z části a). Začneme s funkcí f závislou na s, t a transformujeme je v x, y . Matematicky řečeno teď uvažujeme inverzní transformaci k té, která nám byla dána, namísto $(s, t) \mapsto (x, y)$ chceme jít $(s, t) \mapsto (x, y)$. To se dá snadno realizovat vyřešením systému $x = \sqrt{s}$, $y = t/s$ pro s a t , dostáváme vzorce $s = x^2$, $t = x^2 y$.

Teď už pokračujeme jako předtím pomocí řetízkového pravidla.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(s, t) &= \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} 2x + \frac{\partial f}{\partial t} 2xy \\ \frac{\partial}{\partial y} f(s, t) &= \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = 0 + \frac{\partial f}{\partial t} x^2.\end{aligned}$$

V takovéto situaci lidé často dávají přednost mít na pravé straně jen s a t , ale to se snadno zařídí pomocí dané transformace.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f &= 2\sqrt{s} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{2t}{\sqrt{s}} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial y} f &= s \frac{\partial f}{\partial t}.\end{aligned}$$

Dostali jsme stejný výsledek jako předtím.

První přístup se zdá snažší, ale ten druhý se bude hodit v části c). Všimněte si nicméně, že je závislý na naší schopnosti vyřešit ony dvě rovnice $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ pro s, t , což není vždy možné.

c) Zase tu máme dvě možnosti odpovídající přístupům z části b). Jedna možnost je vzít již spočítanou derivaci podle y a zderivovat ji podle x . Víme, že

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \frac{\partial f}{\partial t}$$

(všimněte si, že jsme vzali verzi s x^2 , zjednoduší to další výpočty) a teď derivujeme podle x . Připomeňme, že $\frac{\partial f}{\partial t}$ závisí na s, t , které zase závisí na x, y . Máme tedy součin dvou funkcí zahrnujících x , proto musíme začít součinným pravidlem. Pak aplikujeme řetízkové pravidlo na $\frac{\partial f}{\partial t}(s, t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2) \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right) \\ &= 2x \frac{\partial f}{\partial t} + x^2 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right]\end{aligned}$$

$$= 2x \frac{\partial f}{\partial t} + x^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} 2xy \right] = 2x \frac{\partial f}{\partial t} + 2x^3 \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + 2x^3 y \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Řešení dokončíme dosazením za x a y a dostaneme transformaci

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sqrt{s} \frac{\partial f}{\partial t} + (\sqrt{s})^3 \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + t \sqrt{s} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

2) Jaká je alternativa? Přístup, který je delší, ale bezpečnější (nemusíme být schopni najít ty inverzní transformace), je obdobný tomu z b1). Začneme s rovnicemi odvozenými v části a), vlastně můžeme použít jen tu druhou,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial y}$$

a teď ji zderivujeme vzhledem k s a také k t , dostaneme dvě rovnice.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = \frac{-1}{s^2} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{s} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial t}$$

neboli po zjednodušení a dosazení za $\frac{\partial f}{\partial y}$ z části 1),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = \frac{-1}{s^2} s \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{1}{2\sqrt{s}} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{-t}{s^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{s} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{1}{s}$$

Tento systém vyřešíme pro $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, je tam další neznámá derivace, jmenovitě $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, ale máme dvě rovnice, takže žádný problém, budeme eliminovat. Dostáváme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2\sqrt{s} \frac{\partial f}{\partial t} + 2\sqrt{s^3} \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + t 2\sqrt{s} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Vydělením 2 dostáváme přesně totéž, co předtím.

Poznamenejme, že jsme měli velké štěstí, že se v rovnici pro $\frac{\partial f}{\partial t}$ objevila na pravé straně jen jedna parciální derivace. Obecně lze očekávat, že se v obou rovnicích v části 1) budou vyskytovat derivace podle x a y , jak je tomu v první z nich. Pak bychom museli derivovat obě rovnice podle s a t a dostali bychom čtyři rovnice se čtyřmi neznámými parciálními derivacemi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, pak by bylo třeba ten systém vyřešit. Tento postup je tedy opravdu delší, ale jak už jsme poznamenali, obecnější.

Bonus: Najdeme $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Začneme s

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial s} + 2xy \frac{\partial f}{\partial t}.$$

a pak (podobně jako výše) počítáme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(2x \frac{\partial f}{\partial s} + 2xy \frac{\partial f}{\partial t} \right) = 2x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) + 2x \frac{\partial f}{\partial t} + 2xy \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &= 2x \left[\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \frac{\partial t}{\partial y} \right] + 2x \frac{\partial f}{\partial t} + 2xy \left[\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial y} \right] \\ &= 2x^3 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} + 2x \frac{\partial f}{\partial t} + 2x^3 y \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Proto

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \sqrt{s} \frac{\partial f}{\partial t} + (\sqrt{s})^3 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} + t \sqrt{s} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Jestliže je f „pěkné“, tak se ty dvě smíšené derivace musejí rovnat.

10. Máme $F(x, y) = \sin(xy) + x^2 + y^2$. Ověříme, že $F(0, 1) = 1$, takže otázka má smysl.

- a) $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = x \cos(xy) + 2y|_{x=0, y=1} = 2$. Protože $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) \neq 0$, podle Věty o implicitní funkci existuje funkce $y(x)$ definovaná na nějakém okolí bodu $x = 0$ taková, že $y(0) = 1$ a $F(x, y(x)) = 0$.
- b) K nalezení $y'(x)$ můžeme použít Větu o implicitní funkci, ale je snazší prostě derivovat danou rovnici, máje na paměti, že y je teď funkce x . Dostáváme

$$\begin{aligned}\sin(xy) + x^2 + y^2 &= 1 \\ [\sin(xy(x))]' + [x^2]' + [y(x)^2]' &= [1]' \\ \cos(xy) \cdot [y + xy'] + 2x + 2y \cdot y' &= 0. \quad (\star)\end{aligned}$$

Dosadíme do toho $(0, 1)$ a dostáváme $\cos(0) \cdot [1 + 0 \cdot y'(0)] + 0 + 2 \cdot y'(0) = 0$, vyřešíme pro $y'(0)$ a dostáváme $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

Máme bod $(0, 1)$ a směrnici $y'(0) = -\frac{1}{2}$, rovnice tečny je proto $y = -\frac{1}{2}(x-0) + 1$ neboli $x + 2y = 2$.

c) Jsou dvě možnosti. Jedna je znovu derivovat rovnici (\star) :

$$-\sin(xy)[y + xy'] \cdot [y + xy'] + \cos(xy)[y' + y' + xy''] + 2 + 2y'y' + 2yy'' = 0.$$

Dosazením $x = 0$, $y = 1$ a $y' = -\frac{1}{2}$, pak vyřešením pro $y''(0)$ dostaneme $y''(0) = -\frac{3}{4}$.

Alternativní řešení: Vyřešíme obecně (\star) pro y' :

$$y'(x) = -\frac{2x + \cos(xy)y}{2y + \cos(xy)x}$$

a pak zderivujeme:

$$\begin{aligned}y''(x) &= -\frac{[2x + \cos(xy)y]' \cdot [2y + \cos(xy)x] - [2x + \cos(xy)y] \cdot [2y + \cos(xy)x]'}{[2y + \cos(xy)x]^2} \\ &= -\frac{2 - \sin(xy)(y + xy')y + \cos(xy)y'}{2y + \cos(xy)x} + \frac{(2x + \cos(xy)y)(2y' - \sin(xy)(y + xy')x + \cos(xy))}{[2y + \cos(xy)x]^2}.\end{aligned}$$

Pak dosadíme $x = 0$, $y = 1$, $y' = -\frac{1}{2}$ a je to hotovo.

První řešení je evidentně výhodnější.

11. Rovnici lze napsat jako $F(x, y, z) = 0$, kde

$$F(x, y, z) = \sin(xz) + \sin(yz) - \sin(xy).$$

a) Aby funkce $z(x, y)$ existovala, potřebujeme $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, \pi) \neq 0$. Zde $\frac{\partial F}{\partial z} = x \cos(xz) + y \cos(yz)$, takže $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, \pi) = -1 \neq 0$ a zbytek dodělá Věta o implicitní funkci.

b) Daná rovnice definuje hladinu konstantnosti funkce F , ke které se normálový vektor najde jako gradient F . $\nabla F = (-y \cos(xy) + z \cos(yz), -x \cos(xy) + z \cos(yz), x \cos(xz) + y \cos(yz))$, takže $\vec{n} = \nabla F(0, 1, \pi) = (\pi - 1, -\pi, -1)$.

Tečná rovina je dána rovnicí $(\pi - 1)x - \pi(y - 1) - (z - \pi) = 0$, což je

$$(\pi - 1)x - \pi y - z + 2\pi = 0.$$

Alternativní řešení: Podíváme se na to jako na otázku nalezení tečné roviny ke grafu $z = z(x, y)$. Normálový vektor je dán jako $(z_x, z_y, -1)$. Parciální derivace získáme tak, že zderivujeme danou rovnici podle x a podle y s tím, že teď je $z = z(x, y)$:

$$\begin{aligned}\cos(xz)[z + xz_x] + \cos(yz)yz_x &= \cos(xy)y \\ \cos(xz)xz_y + \cos(yz)[z + yz_y] &= \cos(xy)x\end{aligned}$$

Dosadíme $(0, 1, \pi)$ a dostáváme $z_x(0, 1) = \pi - 1$, $z_y(0, 1) = -\pi$, proto $\vec{n} = (\pi - 1, -\pi, -1)$ jako předtím.

Poznamenejme, že jsme pro zjednodušení zápisu použili užitečnou zkratku $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$, $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$.

c) Druhou parciální derivaci nejsnáze najdeme pomocí alternativního řešení části b). Tam jsme původní rovnici derivovali podle x , teď ten výsledek zderivujeme podle y a získáme kýženou z_{xy} .

Zase si musíme pamatovat, že $z = z(x, y)$, ale teď i $z_x = z_x(x, y)$.

$$\begin{aligned} [\cos(xz)[z + xz_x] + \cos(yz)yz_x]_y &= [\cos(xy)y]_y \implies \\ -\sin(xz)xz_y[z + xz_x] + \cos(xz)[z_y + xz_{xy}] - \sin(yz)[z + yz_y]yz_x + \cos(yz)z_x + \cos(yz)yz_{xy} \\ &= -\sin(xy)xy + \cos(xy). \end{aligned}$$

Dosadíme bod $(0, 1, \pi)$ a také $z_x(0, 1) = \pi - 1$, $z_y(0, 1) = -\pi$ a vyřešíme výslednou rovnici, dostaneme tak $z_{xy}(0, 1) = 2 - 2\pi$.

Je ovšem také možné vzít rovnici, kterou jsme v části b) dostali derivováním podle y , a pak ji zderivovat podle x , dostaneme stejný výsledek.