MA2: Řešené příklady—Funkce více proměnných: Integrály

Vypočtěte následující integrály:

1. $\int 6x^2y^2 + 6x + 6y\,dx$ and $\int\limits_0^1 6x^2y^2 + 6x + 6y\,dx$,

2. $\int \cos(xy + 2z)\,dy$,

3. $\int\limits_0^1 e^{xy+2z}\,dz$.

4. Vypočítejte $\iint\limits_{\Omega} (x+1)\,dA$, kde Ω je omezená oblast vymezená grafy $y = x^2$ and $y = 5x + 6$.

5. Najděte průměr funkce $f(x,y) = 2e^{x/y}$ na množině

$$\Omega = \{(x,y) \in I\!R^2;\ x \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Změňte pořadí integrace pro následující integrály:

6. $\int\limits_2^3 \int\limits_2^{8-2x} f(x,y)\,dy\,dx$,

7. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{e^y} f(x,y)\,dx\,dy$,

8. $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^x f(x,y)\,dy\,dx$.

9. Vypočítejte $\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{y}\,\frac{1}{x^2+y^2}\,dA$, kde $\Omega = \langle 0,\infty) \times \langle 1,\infty)$. Zkuste to oběma způsoby.

Řešení:

1. Předstíráme, že y je konstanta, pak

$$\int 6x^2y^2 + 6x + 6y\,dx = y^2 \int 6x^2\,dx + \int 6x\,dx + y \int 6\,dx = y^2 2x^3 + 3x^2 + y6x + C$$
$$= 2x^3y^2 + 3x^2 + 6xy + C,\ x,y \in I\!R.$$

Teď už snadno vyhodnotíme určitý integrál, máme dosadit za x. Není špatný nápad si to připomenout vhodným značením, třeba takto:

$$\int\limits_0^1 6x^2y^2 + 6x + 6y\,dx = \Big[2x^3y^2 + 3x^2 + 6xy\Big]_{x=0}^{x=1} = 2y^2 + 3 + 6y.$$

Zkušení integrátoři by ale často napsali jen $\Big[\ \dots\Big]_0^1$.

2. Předstíráme, že x a z jsou konstanty, pak

$$\int \cos(xy+2z)\,dy = \left| \begin{array}{l} u = xy+2z \\ du = \frac{\partial}{\partial y}[xy+2z]\,dy = x\,dy \\ dy = \frac{1}{x}\,du \end{array} \right| = \int \cos(u)\frac{1}{x}\,du = \frac{1}{x}\int \cos(u)\,du$$

$$= \frac{1}{x}\sin(u) + C = \frac{1}{x}\sin(xy+2z) + C,\ y,z \in I\!R,\ x \neq 0.$$

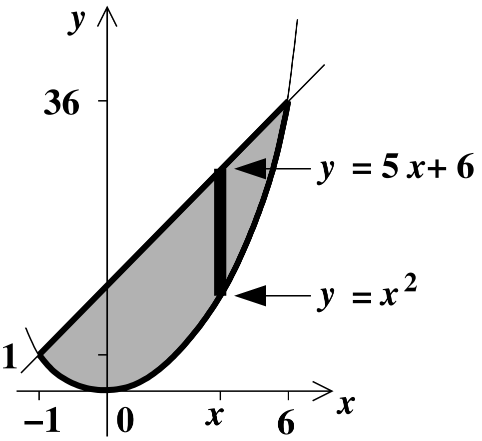
3. Teď předstíráme, že x, y jsou konstanty.

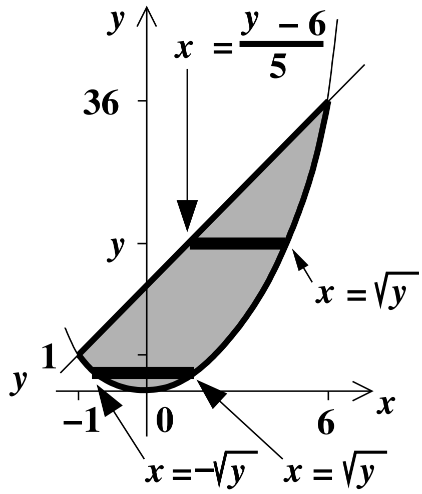
$$\int\limits_0^1 e^{xy+2z}\,dz = \left| \begin{array}{r} u = xy+2z \\ du = \frac{\partial}{\partial z}[xy+2z]\,dz = 2\,dz \\ dz = \frac{1}{2}\,du \\ z=1 \mapsto u = xy+2 \\ z=0 \mapsto u = xy \end{array} \right| = \int\limits_{xy}^{xy+2} e^u \frac{1}{2}\,du = \left[\frac{1}{2}e^u\right]_{xy}^{xy+2} = \frac{1}{2}e^{xy+2} - \frac{1}{2}e^{xy}.$$

Mimochodem, neurčitý integrál je

$$\int e^{xy+2z}\,dz = \frac{1}{2}e^{xy+2z} + C,\ x,y,z \in I\!R.$$

4. Jak oblast Ω vypadá? Nejprve se podíváme, jestli se křivky protínají: $x^2 = 5x+6$ dává $x = -1, 6$. Načrtneme oblast (není v měřítku):





Je zjevné, že svislé řezy jsou zde mnohem lepší než vodorovné, protože vodorovné řezy by se lišily typem podle toho, kde řežeme.

Svislý řez se určí tím, že pevně zvolíme hodnotu x, pohyb nahoru a dolů se dělá změnou y. Budeme proto integrovat s dy, kde se y mění mezi $y = x^2$ a $y = 5x+6$. Integrování po tomto svislém řezu tedy vede na $\int\limits_{x^2}^{5x+6} (x+1)\,dy$. Pak dáme všechny tyto řezy dohromady pomocí další integrace, kdy „sčítáme“ všechna x udávající naše řezy:

$$\int\limits_{-1}^{6}\Big(\int\limits_{x^2}^{5x+6} (x+1)\,dy\Big)\,dx = \int\limits_{-1}^{6}\int\limits_{x^2}^{5x+6} (x+1)\,dy\,dx.$$

Tento dvojnásobný integrál se teď integruje běžným způsobem, zevnitř ven.

$$\int_{-1}^{6}\int_{x^2}^{5x+6}(x+1)\,dy\,dx=\int_{-1}^{6}\Big[xy+y\Big]_{y=x^2}^{y=5x+6}dx=\int_{-1}^{6}[x(5x+6)+(5x+6)]-[x\cdot x^2+x^2]\,dx$$

$$=\int_{-1}^{6}4x^2-x^3+11x+6\,dx=\Big[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{11}{2}x^2+6x\Big]_{-1}^{6}=200+\frac{1}{12}.$$

Jak by to fungovalo, kdybychom se rozhodli pro vodorovné řezy? Doleva a doprava se pohybujeme změnou x, takže integrály po vodorovných řezech s dělají vzhledem k x, každý řez je určen volbou y. Pokud si zvolíme y mezi 0 a 1, pak se v odpovídajícím řezu x mění mezi $-\sqrt{y}$ a $\sqrt{y}$. Pokud zvolíme y mezi 1 a 36, pak se x mění mezi $\frac{1}{5}(y-6)$ a $\sqrt{y}$. Dostáváme tedy

$$\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(x+1)\,dx\,dy+\int_{1}^{36}\int_{(y-6)/5}^{\sqrt{y}}(x+1)\,dx\,dy.$$

Teď integrujeme:

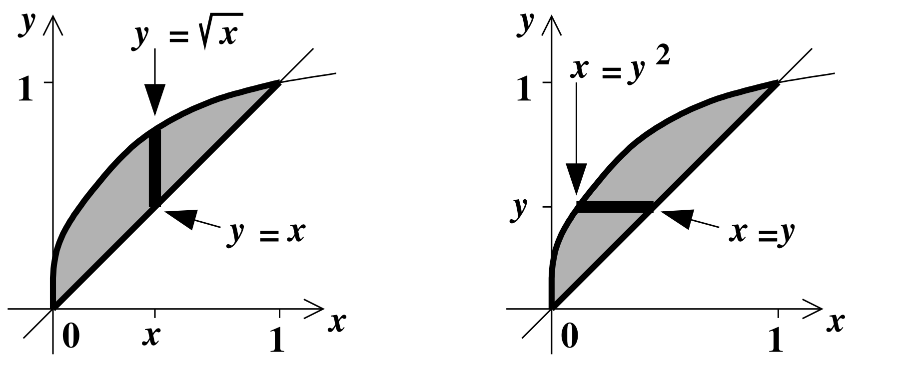
$$\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(x+1)\,dx\,dy+\int_{1}^{36}\int_{(y-6)/5}^{\sqrt{y}}(x+1)\,dx\,dy=\int_{0}^{1}\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dy+\int_{1}^{36}\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{(y-6)/5}^{\sqrt{y}}dy$$

$$=\int_{0}^{1}2\sqrt{y}\,dy+\int_{1}^{36}\frac{1}{2}y+\sqrt{y}-\frac{1}{50}(y-6)^2-\frac{1}{5}(y-6)\,dy$$

$$=\Big[\frac{4}{3}y^{3/2}\Big]_{0}^{1}+\Big[\frac{1}{4}y^2+\frac{2}{3}y^{3/2}-\frac{1}{150}(y-6)^3-\frac{1}{10}(y-6)^2\Big]_{1}^{36}=200+\frac{1}{12}.$$

Asi souhlasíte, že to takto bylo těžší. Moudrá volba řezů může mít velký dopad.

5. Jaká je daná oblast?



Abychom určili průměr, potřebujeme znát dvě věci: Obsah Ω a integrál f na Ω. I ten obsah lze zjistit integrováním přes Ω, tentokráte integrováním funkce 1. Zde se svislé i vodorovné řezy zdají z geometrického pohledu rovnocené (stačí jeden integrál), takže zkusíme svislé řezy, které (pro dané x) jsou od $y=x$ po $y=\sqrt{x}$.

$$A(\Omega)=\int_{0}^{1}\int_{x}^{\sqrt{x}}1\,dy\,dx=\int_{0}^{1}\Big[y\Big]_{x}^{\sqrt{x}}dx=\int_{0}^{1}\sqrt{x}-x\,dx=\Big[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{2}x^2\Big]_{0}^{1}=\frac{1}{6}.$$

Teď integrujeme danou funkci.

$$\iint\limits_{\Omega} 2e^{x/y}\,dA = \int\limits_0^1 \int\limits_x^{\sqrt{x}} 2e^{x/y}\,dy\,dx.$$

Máme drobný problém, integrál $\int e^{a/y}\,dy$ je dost drsný, jeden z těch, které nejdou vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Naštěstí máme alternativu, zkusíme vodorovné řezy a doufáme, že vyjdou lepší integrály. Pro dané y se hodnoty x na odpovídajícím řezu mění mezi $x = y^2$ a $x = y$ (pěkné vzorce, možná jsme tak měli dělat i ten obsah). Dostáváme

$$\iint\limits_{\Omega} 2e^{x/y}\,dA = \int\limits_0^1 \int\limits_{y^2}^{y} 2e^{x/y}\,dx\,dy.$$

Toto je mnohem snažší, potřebujeme najít $\int e^{x/a}\,dx$, což je standardní integrál, který se nejlépe dělá substitucí. Nakonec také budeme potřebovat integraci per partes.

$$\iint\limits_{\Omega} 2e^{x/y}\,dA = \int\limits_0^1 \int\limits_{y^2}^{y} 2e^{x/y}\,dx\,dy = \left| \begin{array}{c} w = \frac{x}{y} \\ dw = \frac{1}{y}\,dx \\ dx = y\,dw \\ x = y \mapsto w = 1 \\ x = y^2 \mapsto w = y \end{array} \right| = \int\limits_0^1 \int\limits_y^1 2e^{w} y\,dw\,dy$$

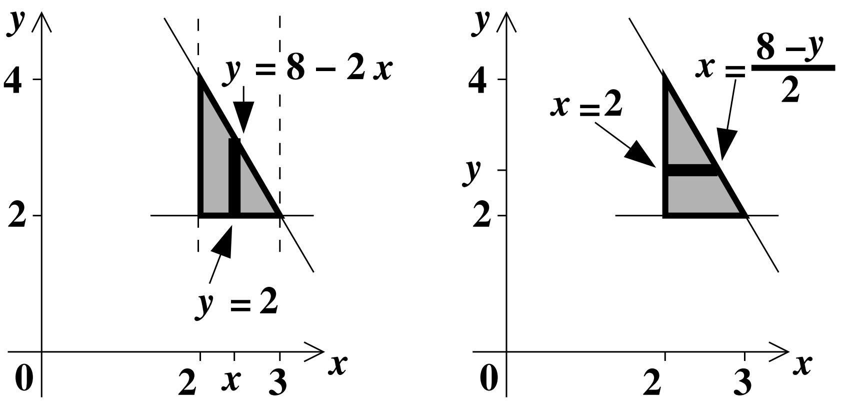
$$= \int\limits_0^1 \Big[2y\,e^{w}\Big]_{w=y}^{w=1} dy = \int\limits_0^1 2e\,y - 2y\,e^{y}\,dy = e\int\limits_0^1 2y\,dy - \int\limits_0^1 2y\,e^{y}\,dy$$

$$= e\Big[y^2\Big]_0^1 - \Big[2y\,e^{y}\Big]_0^1 + \int\limits_0^1 2\,e^{y}\,dy = e - 2e + \Big[2\,e^{y}\Big]_0^1 = e - 2.$$

Průměr je tedy

$$\frac{1}{A(\Omega)} \iint\limits_{\Omega} 2e^{x/y}\,dA = 6e - 12.$$

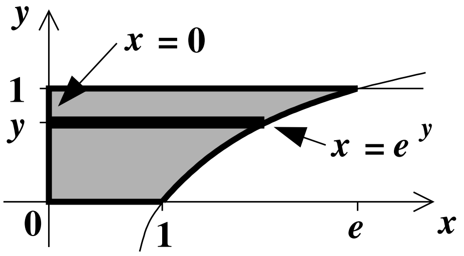
6. Nejprve potřebujeme zjistit, přes jakou oblast Ω integrujeme. Vnitřní proměnnou je y, která nás pohybuje nahoru a dolů, takže jdeme po svislých řezech. Pozice těchto řezů jsou dány hodnotami x, takže ten nejvíce vlevo je na přímce $x = 2$ a ten nejvíce vpravo na přímce $x = 3$. Z limit vnitřního integrálu vidíme, že pro dané x jde odpovídající svislý řez od křivky $y = 2$ po křivku $y = 8 - 2x$, takže Ω je oblast mezi těmito dvěma křivkami. Nakreslíme obrázek.

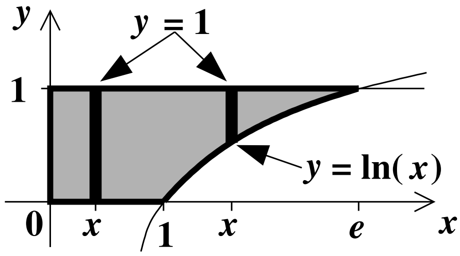


Změna pořadí integrace znamená přepnout na ten druhý směr řezů (viz obrázek vpravo). Vodorovné řezy jsou dány volbou nějakého y mezi 2 a 4 (to bude vnější integrál), pro takové y se proměnná x pohybuje mezi $x = 2$ a $x = \frac{1}{2}(8 - y)$ (to dostaneme vyřešením vztahu $y = 8 - 2x$ pro x). Dostáváme integrál

$$\int_2^4 \int_2^{(8-y)/2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

7. Začneme určením oblasti integrace Ω. Vnitřní proměnná je x udávající pohyb doprava a doleva, což znamená, že jdeme po vodorovných řezech, nejnižší je na přímce $y = 0$ a nejvyšší u $y = 1$. Řezy sahají od křivky $x = 0$ po křivku $x = e^y$, což je $y = \ln(x)$. Teď jsme připraveni to nakreslit.

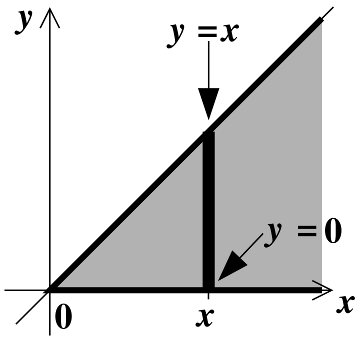


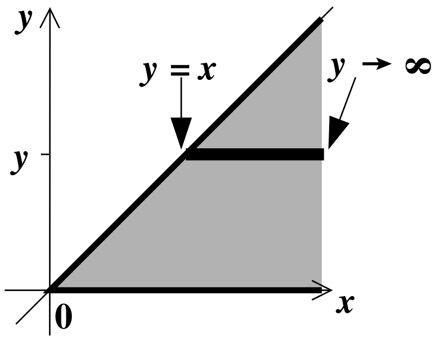


Pro změnu pořadí integrace přejdeme na svislé řezy, ale obrázek jasně ukazuje, že pak máme dva typy řezů, jinými slovy, dostaneme dva integrály: Pro x mezi 0 a 1 jdou svislé řezy od $y = 0$ po $y = 1$, pro x mezi 1 a e jdou svislé řezy od $y = \ln(x)$ po $y = 1$. Dostáváme

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^e \int_{\ln(x)}^1 f(x,y)\,dy\,dx.$$

8. Nejprve určíme oblast integrace Ω. Vnitřní integrál s pracovní proměnnou y ukazuje na svislé řezy, každý řez se rozkládá mezi křivkami $y = 0$ a $y = x$. Řezy bereme pro všechna $x \geq 0$, obrázek je teď jasný.

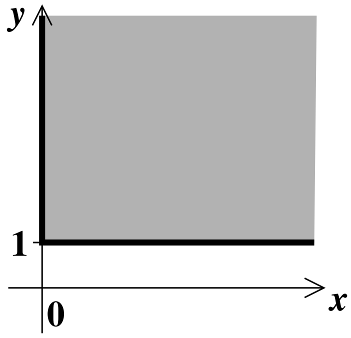




Změna pořadí integrace odpovídá přechodu k těm druhým řezům, tedy k vodorovným (viz obrázek napravo). Abychom pokryli celou Ω, musíme uvažovat vodorovné řezy až do nekonečna, jejich pozice jsou tedy dány pomocí y z množiny $\langle 0, \infty)$. Pro zvolené y pak odpovídající řez nechává x probíhat mezi křivkou $x = y$ a nekonečnem. A už je tu integrál.

$$\int_0^\infty \int_y^\infty f(x,y)\,dx\,dy.$$

9. Protože je daná oblast obdélník,



oba integrály budou mít konstantní meze integrace a můžeme použít libovolné pořadí dle libosti.

1) Začneme svislými řezy, což odpovídá vnitřnímu integrálu používajícímu y.

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dA = \int_0^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{1}{y}\,\frac{1}{x^2+y^2}\,dy\,dx.$$

Potřebujeme spočítat $\int \frac{1}{y}\,\frac{1}{a^2+y^2}\,dy$, to volá po parciálních zlomcích, ve kterých bude x parametr:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y(y^2+x^2)}\,dy &= \int \frac{A}{y} + \frac{By+C}{y^2+x^2}\,dy = \int \frac{\frac{1}{x^2}}{y} - \frac{\frac{1}{x^2}y}{y^2+x^2}\,dy\\
&= \frac{1}{x^2}\int \frac{dy}{y} - \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{2}\int \frac{2y\,dy}{y^2+x^2} = \left|\begin{array}{l} z = y^2+x^2\\ dz = 2y\,dy\end{array}\right| = \frac{1}{x^2}\int\frac{dy}{y} - \frac{1}{2x^2}\int\frac{dz}{z}\\
&= \frac{1}{x^2}\ln|y| - \frac{1}{2x^2}\ln|y^2+x^2| + C = \frac{1}{2x^2}\ln|y^2| - \frac{1}{2x^2}\ln|y^2+x^2| + C\\
&= \frac{1}{2x^2}\ln\Big(\frac{y^2}{y^2+x^2}\Big) + C.\end{aligned}$$

Protože je náš integrál nevlastní, doporučuje se vyjádřit primitivní funkci v kompaktním tvaru, což jsme udělali. Teď vypočítáme

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{y}\,\frac{1}{x^2+y^2}\,dy &= \Big[\frac{1}{2x^2}\ln\Big(\frac{y^2}{y^2+x^2}\Big)\Big]_{y=1}^{y=\infty} = \lim_{y\to\infty}\Big(\frac{1}{2x^2}\ln\Big(\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\Big)\Big) - \frac{1}{2x^2}\ln\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)\\
&= \frac{1}{2x^2}\ln(1) + \frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1).\end{aligned}$$

Zpět k danému integrálu:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dA = \int_0^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{1}{y}\,\frac{1}{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1)\,dx$$

To volá po integraci per partes.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1)\,dx &= \left|\begin{array}{ll} f = \ln(x^2+1) & g' = \frac{1}{2x^2}\\ f' = \frac{2x}{x^2+1} & g = -\frac{1}{2x}\end{array}\right| = -\frac{1}{2x}\ln(x^2+1) - \int -\frac{1}{2x}\,\frac{2x}{x^2+1}\,dx\\
&= -\frac{1}{2x}\ln(x^2+1) + \int\frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2x}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) + C.\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f(x,y)\,dA &= \Big[\operatorname{arctg}(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2x}\Big]_0^{\infty}\\
&= \lim_{x\to\infty}\Big(\operatorname{arctg}(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2x}\Big) - \lim_{x\to 0^+}\Big(\operatorname{arctg}(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2x}\Big)\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{\ln(x^2+1)}{2x}\Big) - 0 + \lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{\ln(x^2+1)}{2x}\Big)$$
$$\underset{\text{l'H}}{=\!=} \frac{\pi}{2} - \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2x}{2(x^2+1)}\Big) + \lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{2x}{2(x^2+1)}\Big) = \frac{\pi}{2} - 0 + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

To tedy byl integrál. Pěkný přehled integračních technik.

2) Teď zkusíme vodorovné řezy.

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dA = \int_1^\infty \int_0^\infty \frac{1}{y}\,\frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_1^\infty \frac{1}{y}\int_0^\infty \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Vnitřní integrál $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ je standardní, někteří lidé si jej dokonce pamatují. Ti ostatní mohou použít třeba doporučenou nepřímou substituci.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+y^2} = \left|\begin{array}{c} x = yt \\ dx = y\,dt \\ x=0 \mapsto t=0 \\ x=\infty \mapsto t=\infty \end{array}\right| = \int_0^\infty \frac{y\,dt}{y^2t^2+y^2} = \frac{1}{y}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1}$$
$$= \Big[\frac{1}{y}\operatorname{arctg}(t)\Big]_{t=0}^{t=\infty} = \lim_{t\to\infty}\Big(\frac{1}{y}\operatorname{arctg}(t)\Big) - 0 = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{y}.$$

Proto

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dA = \int_1^\infty \frac{1}{y}\int_0^\infty \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_1^\infty \frac{1}{y}\cdot\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}\int_1^\infty y^{-2}\,dy$$
$$= \frac{\pi}{2}\Big[-\frac{1}{y}\Big]_1^\infty = \lim_{y\to\infty}\Big(-\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{y}\Big) - \frac{\pi}{2}(-1) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Tímto způsobem se to zdá trochu snažší.