NUM: Cvičné příklady—numerická matematika

Všechny úlohy by měly být řešitelné bez pomoci kalkulačky. Ale použít je můžete.
Úlohy označené symbolem (+) jsou teoretičtějšího rázu a mohou se objevit u ústní zkoušky nebo v teoretické otázce písemky.

Aproximace.

a0a. Najděte aproximační vzorec pro funkci $\ln(x)$ na okolí bodu $a = 1$ s chybou $O(h^4)$.

a0b. Najděte lineární aproximaci pro funkci $\frac{1}{x}$ na okolí bodu $a = 2$.

a0c. Najděte aproximační vzorec pro funkci $\operatorname{arctg}(x)$ na okolí bodu $a = 0$ s chybou $O(h^3)$.

a1a. Pomocí lineární aproximace odhadněte $\sqrt{4.5}$.

a1b. Pomocí kvadratické aproximace odhadněte $e^{0.4}$.

a1c. Pomocí kvadratické aproximace odhadněte $\cos(\pi + 0.5)$.

Integrály.

i0a. Vysvětlete obrázkem a odvoďte vzorce pro obdélníkovou metodu pro odhad určitého integrálu.

i0b. Vysvětlete obrázkem a odvoďte vzorec pro lichoběžníkovou metodu pro odhad určitého integrálu.

i0c. Vysvětlete pojem řád metody pro metody numerické integrace. Uveďte řád metody pro metody obdélníkovou, lichoběžníkovou a Simpsonovu.

i0d. Pomocí metody řádu 3 jsme vytvořili odhad integrálu s počtem dělení $n = 100$ a máme důvod se domnívat, že jeho chyba je omezena číslem $e_n = 0.01$. Odhadněte, jaká asi bude chyba odhadu, když jej vytvoříme s počtem dělení $n = 200$.
Jaký počet dělení máme použít, chceme-li mít chybu $\varepsilon = 0.0001$?

i0e. Pomocí lichoběžníkové metody jsme vytvořili odhad integrálu s počtem dělení $n = 100$ a máme důvod se domnívat, že jeho chyba je omezena číslem $e_n = 0.016$. Odhadněte, jaká asi bude chyba odhadu, když jej vytvoříme s počtem dělení $n = 200$.
Jaký počet dělení máme použít, chceme-li mít chybu $\varepsilon = 0.001$?

i1a. Odhadněte pomocí obdélníkové metody integrál $\int_0^2 \sqrt{x}\,dx$ s počtem dělení $n = 2$.

i1b. Odhadněte pomocí obdélníkové metody integrál $\int_2^6 \frac{1}{2}x - 1\,dx$ s krokem $h = 2$.

i2a. Odhadněte pomocí lichoběžníkové metody integrál $\int_0^2 \sqrt{x}\,dx$ s krokem $h = 1$.

i2b. Odhadněte pomocí lichoběžníkové metody integrál $\int_2^6 \frac{1}{2}x - 1\,dx$ s počtem dělení $n = 2$.

Kořeny funkcí.

k0a. Vysvětlete pojem řád iterační metody pro hledání kořene funkce či pevného bodu. Uveďte řád metody pro bisekci a Newtonovu metodu.

k0b. Pomocí iterační metody řádu 2 jsme vytvořili odhady x_6, x_7 čísla r. Máme důvod si myslet, že chyby jsou přibližně $E_6 = 0.01$, $E_7 = 0.0003$.
Odhadněte, kolik asi bude chyba E_8 další iterace.

k1a. Napište algoritmus metody bisekce pro hledání kořenů. Vysvětlete obrázkem.

k1b. Aplikujte metodu bisekce pro hledání kořenů na tuto úlohu: Hledáme řešení rovnice $x^2 = x + 1$ na intervalu $\langle 0, 4\rangle$.
Předveďte první tři kroky iterace.

k1c. Aplikujte metodu bisekce pro hledání kořenů na tuto úlohu: Hledáme řešení rovnice $\frac{1}{x} = x - 2$ na intervalu $\langle 1, 9\rangle$.
Předveďte první tři kroky iterace.

k2a. Napište algoritmus Newtonovy metody pro hledání kořenů. Vysvětlete obrázkem.

k2b. Aplikujte Newtonovu metodu pro hledání kořenů na tuto úlohu: Hledáme řešení rovnice $x^2 = x + 1$, iniciační odhad je $x_0 = 0$.
Předveďte první dva kroky iterace.

k2c. Aplikujte Newtonovu metodu pro hledání kořenů na tuto úlohu: Hledáme řešení rovnice $\frac{1}{x} = x - 2$, iniciační odhad je $x_0 = 1$.
Předveďte první dva kroky iterace.

k2d. Sestavte pomocí Newtonovy metody iterační schéma, které by mělo najít číslo x splňující $x^3 = A$ (tedy počítáme $\sqrt[3]{A}$).

k2e. Sestavte pomocí Newtonovy metody iterační schéma, které by mělo najít číslo x splňující $e^{-x} = x$.

k2f(+). Odvoďte obecný vzorec Newtonovy metody pro hledání kořene.

k3a. Napište algoritmus metody přímé iterace pro hledání pevného bodu funkce. Uveďte, jak odhadnout konvergenci. Vysvětlete, jak a k čemu se používá relaxace.

k3b. Aplikujte metodu pevného bodu na tuto úlohu: Hledáme řešení rovnice $x^2 = x + 1$, iniciační odhad je $x_0 = 3$.
Předveďte první dva kroky iterace.
Odhadněte, zda chování na okolí x_0 vypadá optimisticky.

k3c. Aplikujte metodu pevného bodu na tuto úlohu: Hledáme řešení rovnice $\frac{1}{x} = x - 2$, iniciační odhad je $x_0 = 3$.
Předveďte první dva kroky iterace.
Odhadněte, zda chování na okolí x_0 vypadá optimisticky.

k3d(+). U iterací 3b a 3c napište obecný relaxovaný iterační vzorec a pak najděte optimální λ pro zadané x_0.

Diferenciální rovnice.

d0a. Vysvětlete pojem řád metody pro metody řešení počátečních úloh u diferenciálních rovnic. Uveďte řád metody pro Eulerovu metodu. Jakého řádu je jedna z velmi populárních kvalitních metod typu Runge-Kutta?

d0b. Je dána počáteční úloha $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Pomocí jisté metody řádu 2 jsme nalezli odhad řešení na intervalu $\langle x_0, x_0 + T\rangle$ s krokem h a máme důvod se domnívat, že globální chyba je přibližně 0.0027.
Jaká bude asi chyba odhadu řešení, které získáme s krokem $\frac{1}{3}h$?
Jaký asi bude vhodný krok, chceme-li chybu 0.00001?

d0c. Je dána počáteční úloha $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Pomocí jisté metody řádu 4 jsme nalezli odhad řešení na intervalu $\langle x_0, x_0 + T\rangle$ s krokem h a máme důvod se domnívat, že globální chyba je přibližně 0.004.
Jaká bude asi chyba odhadu řešení, které získáme s krokem $\frac{1}{2}h$?

d1a. Je dána počáteční úloha $y' = x+y$, $y(1) = 13$. Sestavte iterační rovnice pro nalezení přibližného řešení na intervalu $\langle 1, 5\rangle$ s krokem $h = 1$ pomocí Eulerovy metody.
Spočítejte první tři body.

d1b. Je dána počáteční úloha $y' = 2xy$, $y(1) = 3$. Sestavte iterační rovnice pro nalezení přibližného řešení na intervalu $\langle 1, 3\rangle$ s počtem dělení $n = 4$ pomocí Eulerovy metody.
Spočítejte první tři body.

Soustavy rovnic.

s0a. Vysvětlete pojem výpočetní náročnost metody.
Uveďte výpočetní náročnost Gaussovy eliminace a zpětného (či dopředného) dosazení. Diskutujte výpočetní náročnost iteračních metod pro řešení soustav.

s0b. Máme metodu pro zpracování matic s výpočetní náročností n^3. Jestliže pro $n = 1000$ trval běh programu 5 hodin, jak dlouho asi potrvá běh programu pro $n = 2000$?

s0c. Vysvětlete, jak se řeší soustavy lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminace a zpětné substituce. Diskutujde výpočetní náročnost.
Vysvětlete, jak se řeší soustavy lineárních rovnic pomocí iteračních metod.

s1a. Uvažujte soustavu $\left[\begin{array}{l} x+y-z=-2, \\ -x \quad\; +2z=3, \\ x+y+z=2. \end{array}\right.$
Použijte ji k vysvětlení, jak se řeší soustavy lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminace a zpětné substituce.

s1b. Uvažujte soustavu $\left[\begin{array}{l} x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1+3x_2 \qquad\; =-2, \\ -2x_1-4x_2 \qquad =2. \end{array}\right.$
Použijte ji k vysvětlení, jak se řeší soustavy lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminace a zpětné substituce.

s2a. Uvažujte soustavu $\left[\begin{array}{l} x \qquad\; -z=1, \\ 2x+y-z=1, \\ x+2y-z=-1. \end{array}\right.$ Připravte pro ni iterační schéma pomocí Gauss-Seidelovy metody.
Ukažte dva kroky s počátečním vektorem $\vec{x}_0 = (0,0,0)$.
(+) Připravte pro ni iterační schéma pomocí Jacobiho metody.
Ukažte dva kroky s počátečním vektorem $\vec{x}_0 = (0,0,0)$.

s2b. Uvažujte soustavu $\left[\begin{array}{l} x \qquad\; +z=2 \\ x-y+2z=1. \\ x+2y+z=1 \end{array}\right.$ Připravte pro ni iterační schéma pomocí Gauss-Seidelovy metody.
Ukažte dva kroky s počátečním vektorem $\vec{x}_0 = (0,0,0)$.
(+) Připravte pro ni iterační schéma pomocí Jacobiho metody.
Ukažte dva kroky s počátečním vektorem $\vec{x}_0 = (0,0,0)$.

Řešení

a0a. $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + O(h^4)$ nebo $\ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + O((x-1)^4)$.

a0b. Vlastně hledáme tečnu. $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + O((x-2)^2)$ nebo $\frac{1}{2+h} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h + O(h^2)$.

a0c. $\operatorname{arctg}(x) = (x-0) + O(x^3) = x + O(x^3)$ nebo $\operatorname{arctg}(h) = \operatorname{arctg}(0+h) = h + O(h^3)$.

a1a. Volba: $a = 4$. $\sqrt{4+h} \approx 2 + \frac{1}{4}h$, proto $\sqrt{4.5} \approx 2 + \frac{1}{4}\cdot 0.5 = 2.125$.

a1b. Volba: $a = 0$. $e^h \approx 1 + h + \frac{1}{2}h^2$, proto $e^{0.4} \approx 1 + 0.4 + \frac{1}{2}\cdot 0.16 = 1.48$.

a1c. $\cos(\pi + h) \approx -1 + \frac{1}{2}h^2$, proto $\cos(\pi + 0.5) \approx -1 + \frac{1}{2}\cdot 0.0.25 = -0.875$.

i0c. Pro každý integrál existuje C aby $|E_n| \le C\frac{1}{n^q}$. Praktická verze: $|E_h| \le Ch^q$.
Metoda levých/pravých obdélníků: řád 1. Lichoběž. metoda: řád 2. Simpsonova metoda: řád 4.

i0d. $E_{2n} \approx C\frac{1}{(2n)^3} = \frac{1}{8}C\frac{1}{n^3} \approx \frac{1}{8}E_n$. Proto $E_{200} \approx \frac{1}{8}E_{100} = 0.00125$.
Chceme $0.0001 = E_{100a} \approx \frac{1}{a^3}E_{100} = \frac{1}{a^3}\cdot 0.01$, odtud $a = \sqrt[3]{100}$, tedy chceme $n = 100\cdot\sqrt[3]{100}$.

i0e. Řád 2. $E_{2n} \approx C\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}C\frac{1}{n^3} \approx \frac{1}{4}E_n$. Proto $E_{200} \approx \frac{1}{4}E_{100} = 0.004$.
Chceme $0.001 = E_{100a} \approx \frac{1}{a^2}E_{100} = \frac{1}{a^2}\cdot 0.016$, odtud $a = \sqrt{16} = 4$, tedy chceme $n = 400$.

i1a. $h = 1$, body $0,1,2$. Dvě možnosti.
Levé obdélníky: $I \approx 1\cdot[\sqrt{0} + \sqrt{1}] = 1$. Pravé obdélníky: $I \approx 1\cdot[\sqrt{1} + \sqrt{2}] = 1 + \sqrt{2}$.

i1b. $n = 2$, body $2,4,6$. Dvě možnosti.
Levé obdélníky: $I \approx 2\cdot[0+1] = 2$. Pravé obdélníky: $I \approx 2\cdot[1+2] = 6$.

i2a. $n = 2$, body $0,1,2$. $I \approx \frac{1}{2}\cdot 1\cdot[\sqrt{0} + 2\sqrt{1} + \sqrt{2}] = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

i2b. $h = 2$, body $2,4,6$. $I \approx \frac{1}{2}\cdot 2\cdot[0 + 2\cdot 1 + 2] = 4$.

k0a. Pro konkrétní posloupnost $\{x_k\}$ generovanou metodou řádu q by mělo (přibližně, pro velká k, pokud konverguje) platit $|E_{k+1}| \approx C|E_k|^q$, kde C je speciální hodnota pro tuto posloupnost (nikoliv obecná konstanta metody).
Bisekce: $q = 1$. Newton: $q = 2$.

k0b. Mělo by platit $|E_7| \approx C|E_6|^2$ neboli $0.0003 = c\cdot 0.0001$. Odtud $c \approx 3$. Následně $|E_8| \approx c|E_7|^2 \approx 3\cdot 0.00000009 = 0.00000027$.

k1b. Převod: $x^2 - x - 1 = 0$, $f(x) = x^2 - x - 1$.
Kontrola: $f(0) = -1 < 0$, $f(4) = 11 > 0$, v pořádku.
(0) $a_0 = 0$, $f(a_0) < 0$; $b_0 = 4$, $f(b_0) > 0$.
Střed $m_0 = \frac{1}{2}(0+4) = 2$, $f(2) = 1 > 0$, proto $a_1 = a_0$, $b_1 = m_0$.
(1) $a_1 = 0$, $f(a_1) < 0$; $b_1 = 2$, $f(b_1) > 0$.
Střed $m_1 = 1$, $f(1) = -1 < 0$, proto $a_2 = m_1$, $b_2 = b_1$.
(2) $a_2 = 1$, $f(a_2) < 0$; $b_2 = 2$, $f(b_2) > 0$.
Střed $m_2 = 1.5$, $f(1.5) = -0.25 < 0$, proto $a_3 = m_2$, $b_3 = b_2$.

k1c. Převod: $\frac{1}{x} - x + 2 = 0$, $f(x) = \frac{1}{x} - x + 2$.
Kontrola: $f(1) = 2 > 0$, $f(9) = \frac{1}{9} - 7 < 0$, v pořádku.
(0) $a_0 = 1$, $f(a_0) > 0$; $b_0 = 9$, $f(b_0) < 0$.
Střed $m_0 = \frac{1}{2}(1+9) = 5$, $f(5) = \frac{1}{5} - 3 < 0$, proto $a_1 = a_0$, $b_1 = m_0$.
(1) $a_1 = 1$, $f(a_1) > 0$; $b_1 = 5$, $f(b_1) < 0$.
Střed $m_1 = 3$, $f(3) = \frac{1}{3} - 1 < 0$, proto $a_2 = a_1$, $b_2 = m_1$.
(2) $a_2 = 1$, $f(a_2) > 0$; $b_2 = 3$, $f(b_2) < 0$.
Střed $m_2 = 2$, $f(2) = \frac{1}{2} > 0$, proto $a_3 = m_2$, $b_3 = b_2$.

k2b. Převod: $x^2 - x - 1 = 0$, $f(x) = x^2 - x - 1$, pak $f'(x) = 2x - 1$.
$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - x_k - 1}{2x_k - 1} = \frac{x_k^2 + 1}{2x_k - 1}$. $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{2}{3}, \dots$

k2c. Převod: $\frac{1}{x} - x + 2 = 0$, $f(x) = \frac{1}{x} - x + 2$, pak $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1$.
$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{1}{x_k} - x_k + 2}{-\frac{1}{x_k^2} - 1} = \frac{2x_k + 2x_k^2}{1 + x_k^2}$. $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{12}{5}, \dots$

k2d. $f(x) = x^3 - A$, pak $f'(x) = 3x^2$ a tedy $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - A}{3x_k^2} = \frac{1}{3}\big(2x_k + \frac{A}{x_k^2}\big)$.

k2e. $f(x) = e^{-x} - x$, pak $f'(x) = -e^{-x} - 1$ a tedy
$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{-x_k} - x_k}{-e^{-x_k} - 1} = x_k + \frac{e^{-x_k} - x_k}{e^{-x_k} + 1} = \frac{x_k + 1}{1 + e^{x_k}}$.

k3b. Převod na pevný bod: například $x^2 - 1 = x$, tedy $\varphi = x^2 - 1$.
Iterace: $x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k^2 - 1$. $x_0 = 3$, $x_1 = 3^2 - 1 = 8$, $x_2 = 8^2 - 1 = 63$, ...
Hodně napoví $\varphi'(x) = 2x$, pro $x = 3$ vyjde $\varphi'(3) = 6 \geq 1$, to nevypadá dobře.
Alternativní převod na pevný bod: $x = \sqrt{x+1}$, tedy $\varphi = \sqrt{x+1}$.
Iterace: $x_{k+1} = \varphi(x_k) = \sqrt{x_k + 1}$. $x_0 = 3$, $x_1 = \sqrt{3+1} = 2$, $x_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$, ...
Hodně napoví $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, pro $x = 3$ vyjde $\varphi'(3) = \frac{1}{4} < 0$, to vypadá nadějně. Druhá otázka je, zda φ zobrazuje nějaký interval I okolo $x = 3$ do sebe, buď by se to prozkoumalo, nebo se prostě zkusí tato nadějná iterace.

k3c. Převod na pevný bod: například $\frac{1}{x} + 2 = x$, tedy $\varphi = \frac{1}{x} + 2$.
Iterace: $x_{k+1} = \varphi(x_k) = \frac{1}{x_k} + 2$. $x_0 = 3$, $x_1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{3}{7} + 2 = \frac{17}{7}$, ...
Hodně napoví $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$, pro $x = 3$ vyjde $|\varphi'(3)| = \frac{1}{9} < 1$, což je nadějné. Druhá otázka ale je, zda φ zobrazuje nějaký interval I okolo $x = 3$ do sebe, buď by se to prozkoumalo, nebo se prostě zkusí tato nadějná iterace.
Alternativní převod na pevný bod: $x = \frac{1}{x-2}$, tedy $\varphi = \frac{1}{x-2}$.
Iterace: $x_{k+1} = \varphi(x_k) = \frac{1}{x_k - 2}$. $x_0 = 3$, $x_1 = \frac{1}{3-2} = 1$, $x_2 = \frac{1}{1-2} = -1$, ...
Hodně napoví $\varphi'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$, pro $x = 3$ vyjde $|\varphi'(3)| = 1$, to nevypadá dobře (ale zase ne moc špatně). Experiment napoví.

k3d(+).
Re: k3b. Iterace: $x_{k+1} = \lambda(x_k^2 - 1) + (1-\lambda)x_k$.
$\varphi_\lambda'(3) = 0 \implies \lambda_{\text{opt}} = -\frac{1}{5}$.
Alternativa: Iterace: $x_{k+1} = \lambda\sqrt{x_k + 1} + (1-\lambda)x_k$.
$\varphi_\lambda'(3) = 0 \implies \lambda_{\text{opt}} = \frac{4}{3}$.
Re: k3c. Iterace: $x_{k+1} = \lambda\big(\frac{1}{x_k} + 2\big) + (1-\lambda)x_k$.
$\varphi_\lambda'(3) = 0 \implies \lambda_{\text{opt}} = \frac{9}{10}$.
Alternativa: Iterace: $x_{k+1} = \lambda\frac{1}{x_k - 2} + (1-\lambda)x_k$.
$\varphi_\lambda'(3) = 0 \implies \lambda_{\text{opt}} = \frac{1}{2}$.

d0b. Dle řádu metody by měla chyba přibližně splňovat $E_h \approx ch^2$. Proto
$E_{h/3} \approx c\big(\frac{1}{3}h\big)^2 = \frac{1}{9}ch^2 = \frac{1}{9} \cdot 0.0027 = 0.0003$.
Chceme $0.00001 = E_{ah} = a^2 E_h = a^2 \cdot 0.0027$, odtud $a = \frac{1}{\sqrt{270}}$, tedy chceme krok $\frac{h}{\sqrt{270}}$.

d0c. Dle řádu metody by měla chyba přibližně splňovat $E_h \approx ch^4$. Proto
$E_{h/2} \approx c\big(\frac{1}{2}h\big)^4 = \frac{1}{16}ch^2 = \frac{1}{16} \cdot 0.004 = 0.00025$.

d1a. Hlavní iterační rovnice je $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$. Krok je zadán, z něj máme počet dělení $n = 4$. Schéma:
(0) $x_0 = 1$, $y_0 = 13$.
(1) $x_{k+1} = x_k + 1$, $y_{k+1} = y_k + 1 \cdot (x_k + y_k) = x_k + 2y_k$ pro $i = 0, \dots, 3$.
Body: $(1, 13)$, $(2, 27)$, $(3, 56)$.

d1b. Hlavní iterační rovnice je $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$. Počet dělení $n = 4$ zadán, odtud krok metody $h = \frac{1}{2}$. Schéma:
(0) $x_0 = 1$, $y_0 = 3$.
(1) $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{2}$, $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} \cdot (2x_k y_k) = (x_k + 1)y_k$ pro $i = 0, \dots, 3$.
Body: $(1, 3)$, $(1.5, 6)$, $(2, 15)$.

s0b. Kubická náročnost znamená, že doba běhu programu je úměrná n^3, tedy $T_n \approx cn^3$. Pokud n zdvojnásobíme, dostaneme $T_{2n} = c(2n)^3 = 8cn^3 = 8T_n$.
Takže pro $n = 2000 = 2 \cdot 1000$ se dá čekat běh programu o trvání $8 \cdot 5 = 40$ hodin.

s1a. Krok 1 (GEM): Rozšířenou matici soustavy $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ pomocí Gausssovy eliminace

převedeme na horní trojúhelníkovou: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Krok 2 (BS): Vzniklou soustavu rovnic $\left[\begin{aligned} x+y-z&=-2 \\ y+z&=1 \\ 2z&=4 \end{aligned}\right.$ řešíme od poslední k první:

$z=2$, $y=1-z=-1$, $x=-2-y+z=1$.

s1b. Krok 1 (GEM): Rozšířenou matici soustavy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ pomocí Gausssovy eliminace

převedeme na horní trojúhelníkovou: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Krok 2 (BS): Vzniklou soustavu rovnic $\left[\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=0 \\ x_2-x_3&=-2 \\ 2x_3&=2 \end{aligned}\right.$ řešíme od poslední k první:

$x_3=1$, $x_2=-2+x_3=-1$, $x_1=-2x_2-x_3=1$.

s2a. Soustavu převedeme na tvar $\left[\begin{aligned} x&=1+z \\ y&=1-2x+z. \\ z&=1+x+2y \end{aligned}\right.$

Toto jsou iterační rovnice. Pokud používáme nejnovější hodnoty proměnných, vznikne Gauss-Seidelova iterace. Formálně:

$$\left[\begin{aligned} x_{k+1}&=1+z_k \\ y_{k+1}&=1-2x_{k+1}+z_k \\ z_{k+1}&=1+x_{k+1}+2y_{k+1} \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1\\-1\\0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1\\-1\\0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \cdots$$

Jacobiho metoda provádí update proměnných až na konci iterace, tedy

$$\left[\begin{aligned} x_{k+1}&=1+z_k \\ y_{k+1}&=1-2x_k+z_k \\ z_{k+1}&=1+x_k+2y_k \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2\\0\\4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \cdots$$

s2b. Soustavu převedeme na tvar $\left[\begin{aligned} x&=2-z \\ y&=-1+x+2z \\ z&=1-x-2y \end{aligned}\right.$

Toto jsou iterační rovnice. Pokud používáme nejnovější hodnoty proměnných, vznikne Gauss-Seidelova iterace. Formálně:

$$\left[\begin{aligned} x_{k+1}&=2-z_k \\ y_{k+1}&=-1+x_{k+1}+2z_k \\ z_{k+1}&=1-x_{k+1}-2y_{k+1} \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2\\1\\-3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 5\\-2\\0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \cdots$$

Jacobiho metoda provádí update proměnných až na konci iterace, tedy

$$\left[\begin{aligned} x_{k+1}&=2-z_k \\ y_{k+1}&=-1+x_k+2z_k \\ z_{k+1}&=1-x_k-2y_k \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2\\-1\\1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1\\3\\1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \cdots$$