NUM: Řešené příklady—numerická matematika

1. a) Najděte aproximační vzorec pro funkci $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ na okolí bodu $a = 1$ s chybou $O(h^4)$.
b) Odhadněte arctg(1.2) pomocí kvadratické aproximace.

2. Odhadněte pomocí obdélníkové a lichoběžníkové metody s počtem dělení $n = 2$ integrál $\int\limits_0^4 \frac{1}{2}x\,dx$.

3. Uvažujme rovnici $\frac{1}{x} = x^2 + 1$.
a) Sestavte pomocí Newtonovy metody iterační schéma, které by mohlo konvergovat k řešení této rovnice. Předveďte první dva kroky iterace pro případ $x_0 = 1$.
b) Převeďte rovnici na úlohu o pevném bodě a sestavte iterační rovnici. Předveďte první dva kroky iterace pro případ $x_0 = 2$.
Odhadněte, zda chování na okolí x_0 vypadá optimisticky.
Pak sestavte obecnou relaxační verzi této iterace a najděte optimální hodnotu relaxačního parametru λ pro okolí bodu $x_0 = 2$.

4. Je dána počáteční úloha $y' = 1 + x^2 y$, $y(-2) = 1$. Sestavte iterační rovnice pro nalezení přibližného řešení na intervalu $\langle -2, 6\rangle$ s krokem $h = 2$ pomocí Eulerovy metody.
Spočítejte první tři body.

5. Uvažujte soustavu $\left[\begin{array}{l} x - y = 4, \\ x + y + 3z = 9, \\ 2x + z = 7. \end{array}\right.$

a) Vyřešte ji (a kroky komentujte) pomocí Gaussovy eliminace a zpětné substituce.
b) Připravte pro ni iterační schéma pomocí Gauss-Seidelovy metody. Proveďte první dvě iterace pro $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)$.

Řešení

1. $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $f''(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$.
Odtud $f(1) = \frac{\pi}{4}$, $f'(1) = \frac{1}{2}$, $f''(1) = -\frac{1}{2}$, $f'''(1) = \frac{1}{2}$.
Verze 1: a) $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + O(h^{n+1})$.
Zde $a = 1$, tedy $\operatorname{arctg}(1+h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{12}h^3 + O(h^4)$.

Verze 2: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + O((x-a)^{n+1})$.
Zde $a = 1$, tedy $\operatorname{arctg}(x) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + O((x-1)^4)$.

Verze 3: Pracovní funkce $g(h) = f(a+h) = \operatorname{arctg}(1+h)$.
Pak $g'(h) = \frac{1}{(h+1)^2+1}$, $g''(h) = \frac{-2(h+1)}{((h+1)^2+1)^2}$, $g'''(h) = \frac{6(h+1)^2-2}{((h+1)^2+1)^3}$.
Odtud $g(0) = \frac{\pi}{4}$, $g'(0) = \frac{1}{2}$, $g''(0) = -\frac{1}{2}$, $g'''(0) = \frac{1}{2}$.
$f(a+h) = g(h) \approx g(0) + g'(0)h + \frac{1}{2!}g''(0)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0)h^n + O(h^{n+1})$, tedy
$\operatorname{arctg}(1+h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{12}h^3 + O(h^4)$.
b) Dle výše provedeného $\operatorname{arctg}(1+h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2$, proto
$\operatorname{arctg}(1.2) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot 0.2 - \frac{1}{4}\cdot 0.2^2 = \frac{\pi}{4} + 0.09 \approx 0.875...$

2. Z $n = 2$ máme $h = \frac{4-0}{2} = 2$. Body $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.
Obdélníkové metody jsou dvě, metoda levých a metoda pravých obdélníků.
Levé: $R_l(2) = 2\cdot(\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 2) = 2$.
Pravé: $R_r(2) = 2\cdot(\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 4) = 6$.
Lichoběžníková: $T(2) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\frac{1}{2}\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 4) = 4$.

3. a) Přepis na úlohu o kořeni: $\frac{1}{x} - x^2 - 1 = 0$. Tedy $f(x) = \frac{1}{x} - x^2 - 1$. Schéma:
$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\frac{1}{x_k} - x_k^2 - 1}{-\frac{1}{x_k^2} - 2x_k} = \frac{x_k^4 - x_k^2 + 2x_k}{1 + 2x_k^3}$.
$x_0 = 1$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{\frac{16}{81} - \frac{4}{9} + \frac{4}{3}}{1 + \frac{16}{81}} = \frac{88}{129}$.

b) Standard: Nejprve $\frac{1}{x}-x^2-1=0$, pak $\frac{1}{x}-x^2-1+x=x$, tedy $\varphi(x)=\frac{1}{x}-x^2-1+x$.
Iterační rovnice: $x_{k+1}=\frac{1}{x_k}-x_k^2-1+x_k$. $x_0=2$, $x_1=-\frac{5}{2}$, $x_2=-\frac{203}{20}$, ...
Konvergence se obvykle získává skrz kontrakci, tedy hlavně chceme $|\varphi'(x)|<1$.
$\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}-2x+1$, $|\varphi'(2)|=\frac{13}{4}>1$. To nevypadá nadějně. Ovšem hned první iterace nás vedou k velkým záporným číslům, kde situace může být jiná. Bohužel není, i tam je φ' velká.
Relaxovaná verze: $x_{k+1}=\lambda\big(\frac{1}{x_k}-x_k^2-1+x_k\big)+(1-\lambda)x_k$.
Optimalizace: $\varphi_\lambda=\lambda\big(\frac{1}{x}-x^2-1+x\big)+(1-\lambda)x$ Chceme $\varphi'(x_0)=0$.
Rovnice $\lambda\big(\frac{-1}{x^2}-2x+1\big)+(1-\lambda)=0$ dává $\lambda=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+2x-1}$, pro $x=2$ je $\lambda_{\text{opt}}=\frac{4}{17}$.

Alternativa: $x=\frac{1}{x^2+1}$, tedy $\varphi(x)=\frac{1}{x^2+1}$.
Iterační rovnice: $x_{k+1}=\frac{1}{x_k^2+1}$. $x_0=2$, $x_1=\frac{1}{5}$, $x_2=\frac{25}{26}$, ...
Konvergence: $\varphi'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$, $|\varphi'(2)|=\frac{4}{25}<1$. To vypadá nadějně. Iterace zatím vypadají slibně, jakoby skákaly doleva doprava, ale stále blíže k jakémusi středu, což by mohlo být to hledané číslo.
Podrobnější analýza: φ zobrazuje $\langle 0,2\rangle$ do $\langle 0,1)\subseteq\langle 0,2\rangle$, na této množině také máme $|\varphi'|<1$, tedy podle Banachovy věty o kontrakci bychom měli dostat konvergenci.
Relaxovaná verze: $x_{k+1}=\lambda\frac{1}{x_k^2+1}+(1-\lambda)x_k$.
Optimalizace: $\varphi_\lambda=\lambda\frac{1}{x^2+1}+(1-\lambda)x$ Chceme $\varphi'(x_0)=0$.
Rovnice $\lambda\frac{-2x}{(x^2+1)^2}+(1-\lambda)=0$ dává $\lambda=\frac{1}{1+\frac{2x}{(x^2+1)^2}}$, pro $x=2$ je $\lambda_{\text{opt}}=\frac{25}{29}$.

Alternativa: $x=\sqrt{\frac{1}{x}-1}$, tedy $\varphi(x)=\sqrt{\frac{1}{x}-1}$.
Iterační rovnice: $x_{k+1}=\sqrt{\frac{1}{x_k}-1}$. $x_0=2$, $x_1=\sqrt{-\frac{1}{2}}$
Máme problém. To asi nebude dobrý nápad. Nicméně kdybychom začali s číslem $x_0<1$, tak už odmocnina nezlobí. Máme pak $\varphi'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$, třeba $\big|\varphi'\big(\frac{1}{2}\big)\big|=2>1$, tak to nevypadá moc nadějně.
Relaxovaná verze: $x_{k+1}=\lambda\sqrt{\frac{1}{x_k}-1}+(1-\lambda)x_k$.
Optimalizace: $\varphi_\lambda=\lambda\sqrt{\frac{1}{x}-1}+(1-\lambda)x$ Chceme $\varphi'(x_0)=0$.
Rovnice $\lambda\frac{-1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}+(1-\lambda)=0$ dává $\lambda=\frac{1}{1+\frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}}$, pro $x=2$ nelze dosadit.

Alternativa: $x^2=\frac{1}{x}-1$ neboli $x=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$, tedy $\varphi(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$.
Iterační rovnice: $x_{k+1}=\frac{1-x_k}{x_k^2}$. $x_0=2$, $x_1=-\frac{1}{4}$, $x_2=20$, ...
To nevypadá dobře. Analýza: $\varphi'(x)=\frac{x-2}{x^3}$, pak $|\varphi'(2)|=0$. To vypadá nadějně, jenže iterace hned odběhnou jinam, mimo jiné jsou poblíž nuly, kde je derivace velká. Podíváme-li se na vzorec, pak z větších čísel dělá malé, ale z malých zase hodně velké. To vypadá na nepříjemnou oscilaci.
Relaxovaná verze: $x_{k+1}=\lambda\frac{1-x_k}{x_k^2}+(1-\lambda)x_k$.
Optimalizace: $\varphi_\lambda=\lambda\frac{1-x}{x^2}+(1-\lambda)x$ Chceme $\varphi'(x_0)=0$.
Rovnice $\lambda\frac{x-2}{x^3}+(1-\lambda)=0$ dává $\lambda=\frac{1}{1-\frac{x-2}{x^3}}$, pro $x=2$ je $\lambda_{\text{opt}}=1$.

4. Hlavní iterační rovnice je $y_{k+1}=y_k+h\cdot f(x_k,y_k)$. Krok $h=2$ zadán, odtud počet dělení $n=4$.
Schéma:
(0) $x_0=-2$, $y_0=1$.
(1) $x_{k+1}=x_k+2$, $y_{k+1}=y_k+2\cdot(1+x_k^2y_k)$ pro $i=0,..,3$ neboli $i=0,1,2,3$.
Iterační vzorec lze upravit na $y_{k+1}=2+(1+2x_k^2)y_k$, kde se y_k dosazuje jen jednou.
Body: $(-2,1)$, $y_1=2+(1+2\cdot 4)\cdot 1$, tedy $(0,11)$; $y_2=2+(1+2\cdot 0)\cdot 11$, tedy $(2,13)$.

5. a) Krok 1 (GEM): Rozšířenou matici soustavy $\begin{pmatrix}1&-1&0&4\\1&1&3&9\\2&0&1&7\end{pmatrix}$ pomocí Gausssovy eliminace převedeme na horní trojúhelníkovou například takto:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 3 & 9\\ 2 & 0 & 1 & 7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 0 & -2 & -6\end{pmatrix}.$$

Krok 2 (BS): Vzniklou soustavu rovnic $\left[\begin{array}{rl} x - y & = 4\\ 2y + 3z & = 5\\ -2z & = -6\end{array}\right.$ řešíme od poslední k první:

$z = 3$, $y = \frac{1}{2}(5 - 3z) = -2$, $x = y + 4 = 2$.

b) Soustavu převedeme na tvar $\left[\begin{array}{l} x = 4 + y,\\ y = 9 - x - 3z,\\ z = 7 - 2x.\end{array}\right.$ Toto jsou iterační rovnice. Pokud používáme nejnovější hodnoty proměnných, vznikne Gauss-Seidelova iterace. Formálně:

$$\left[\begin{array}{l} x_{k+1} = 4 + y_k,\\ y_{k+1} = 9 - x_{k+1} - 3z_k,\\ z_{k+1} = 7 - 2x_{k+1}\end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}4+1=5\\ 9-5-3\cdot 1 = 1\\ 7-2\cdot 5 = -3\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}4+1=5\\ 9-5-3\cdot(-3) = 13\\ 7-2\cdot 5 = -3\end{pmatrix}$$

Poznámka: Matice nevypadá na diagonálně dominantní, takže to s konvergencí asi nebude moc nadějné. Lepší je změnit pořadí rovnic:

$$\left[\begin{array}{l} 2x \quad + z = 7\\ x - y \quad = 4\\ x + y + 3z = 9\end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{k+1} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}z_k\\ y_{k+1} = x_{k+1} - 4\\ z_{k+1} = 3 - \frac{1}{3}x_{k+1} - \frac{1}{3}y_{k+1}.\end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}3\\-1\\\frac{7}{3}\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\-\frac{5}{3}\\\frac{25}{9}\end{pmatrix}.$$