ODR: Cvičné příklady—analyzujeme řešení

Pro následující rovnice načrtněte vektorové pole a určete případná stacionární řešení. Pokud je rovnice autonomní, určete stabilitu ekvilibrií (rovnovážných hodnot).

1. $y' = y^2 - y$;

2. $y' = xy + x$;

3. $y' = \dfrac{(y-1)^2}{e^y - 1}$;

4. $y' = y - \sqrt{x}$;

5. $\dot{x} = x^2 - tx$;

6. $y' = 3y(5-y)$;

7. $y' = \dfrac{xy-1}{x}$;

8. $y' = x^2 + y^2 - 1$;

9. $(y^2 - 1)y' = y^2$;

10. $y' = y^2 - x^2$;

11. $y' = \dfrac{y}{1-y}$;

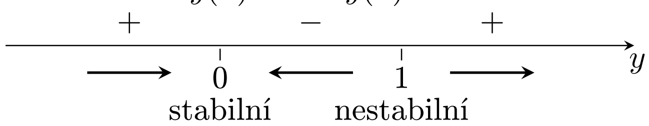
12. $\dot{x} = \dfrac{t+x}{x}$;

13. $y' = y - y^3$;

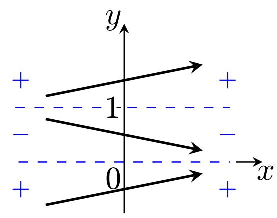
14. $y' = x^2 - yx^2$.

Řešení

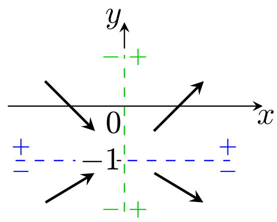
1. $y = y(y-1)$. Stac. řešení $y(x)=0$ a $y(x)=1$. Je autonomní.



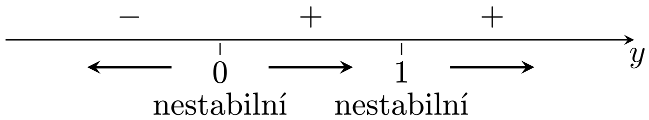
Ekvilibria (rovnovážné hodnoty): $y_e = 1$ nestabilní, $y_e = 0$ stabilní.



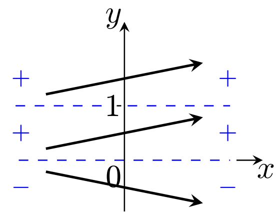
2. $y = x(y+1)$. Stac. řešení $y(x) = -1$. Není autonomní.



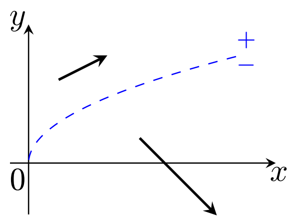
3. $e^y \neq 1 \implies y \neq 0$. Stac. řešení $y(x) = 1$. Je autonomní.



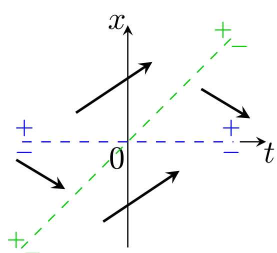
Ekvilibria (rovnovážné hodnoty): $y_e = 1$ nestabilní (semistabilní).
Pozn: $y_e = 0$ by bylo nestabilní, kdyby to bylo ekvilibrium, ale není (dělení nulou).



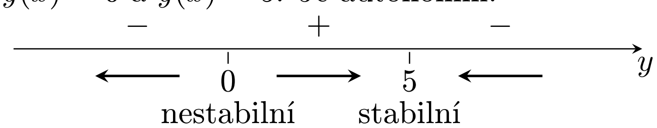
4. $x \geq 0$. Stac. řešení není.
Hranice pro znaménko: $y = \sqrt{x}$.
Není autonomní.



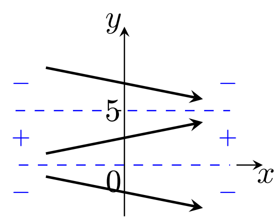
5. $\dot{x} = x(x-t)$. Stac. řešení $x(t) = 0$. Není autonomní.



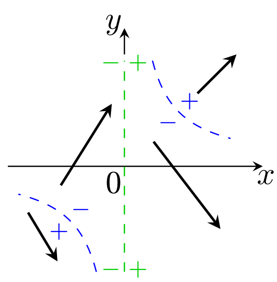
6. Stac. řešení $y(x) = 0$ a $y(x) = 5$. Je autonomní.



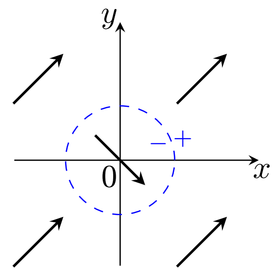
Ekvilibria (rovnovážné hodnoty): $y_e = 5$ stabilní, $y_e = 0$ nestabilní.



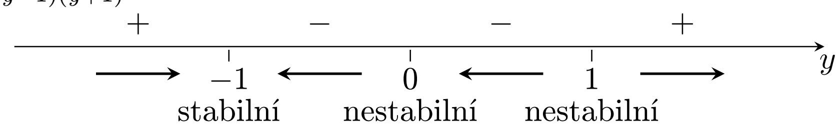
7. $x \neq 0$. Stac. řešení není.
Faktory pro znaménko: x a $xy - 1$. Hranice: $x = 0$ a $xy = 1$, to je hyperbola.
Jaká znaménka pro oblasti dané hyperbolou? Dosadíme $(x, y) = (0, 0)$ a vidíme, že „uvnitř“ je znaménko záporné, obdobně určíme vně.
Není autonomní.



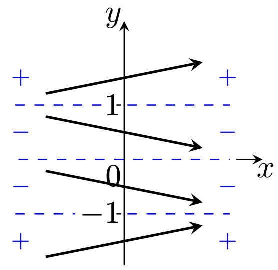
8. Stac. řešení není.
Hranice pro znaménko: $x^2 + y^2 = 1$, kružnice. Znaménko uvnitř například dosazením $(x, y) = (0, 0)$: $y' < 0$.
Není autonomní.



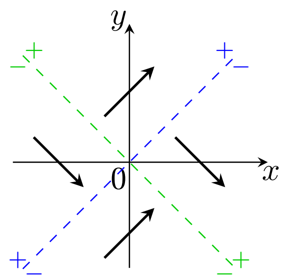
9. $y' = \frac{y^2}{(y-1)(y+1)}$. Stac. řešení $y(x) = 0$. Je autonomní.



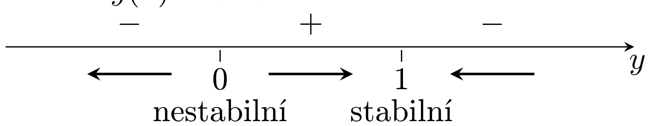
Ekvilibria (rovnovážné hodnoty): $y_e = 0$ nestabilní.
Poznámka: $y(x) = 1$ a $y(x) = -1$ jsou v rovnici povoleny, ale neudělají derivaci nulovou.



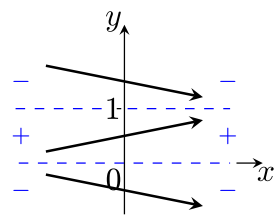
10. $y = (y - x)(y + x)$. Stac. řešení není. Není autonomní.



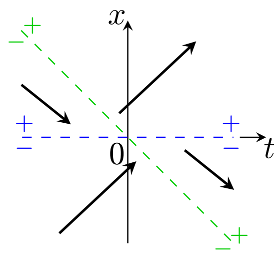
11. $y \neq 1$. Stac. řešení $y(x) = 0$. Je autonomní.



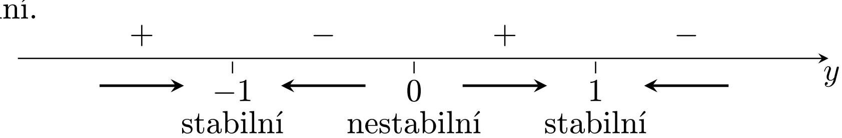
Ekvilibria (rovnovážné hodnoty): $y_e = 0$ nestabilní.
Pozn: $y_e = 1$ by bylo stabilní, kdyby to bylo ekvilibrium, ale není (dělení nulou).
Vlastně stačilo dělat jen tu část obrázku okolo $y = 0$.



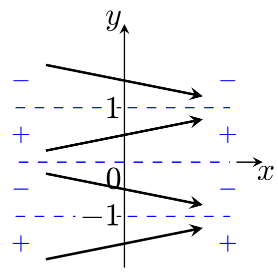
12. $x \neq 0$. Stac. řešení není. Není autonomní.



13. $y = (1 + y)y(1 - y)$. Stac. řešení $y(x) = 0$, $y(x) = 1$ a $y(x) = -1$. Je autonomní.



Ekvilibria (rovnovážné hodnoty): $y_e = 1$ stabilní, $y_e = 0$ nestabilní, $y_e = -1$ stabilní.



14. $y = x^2(1 - y)$, $x^2 \geq 0$ neovlivní znaménko. Stac. řešení $y(x) = 1$. Není autonomní.