ODR: Cvičné příklady—separabilní rovnice

1. Pro rovnici $\dot{x} = \dfrac{x^2 - x}{t}$ najděte řešení Cauchyho úloh

a) $x(1) = 2$; b) $x(4) = \frac{1}{2}$; c) $x(-1) = \frac{2}{3}$; d) $x(1) = \frac{3}{4}$;
e) $x(-2) = 1$; f) $x(3) = 0$; g) $x(1) = -1$; h) $x(0) = 3$.

Pro následující úlohy nejprve najděte obecné řešení a diskutujte podmínky existence (rozbor dle možných hodnot C). Pokud řešení existují na okolí nekonečna, diskutujte jejich asymptotické chování pro $x \to \infty$. Nakonec vyřešte zadanou počáteční (Cauchyho) úlohu.

2. $\dfrac{y'}{y+1} = -4x^3$, $y(0) = 0$;

3. $3y' = \dfrac{1}{y^2}$, $y(2) = 1$;

4. $y' = e^{x-y}$, $y(0) = \ln(4)$;

5. $\dot{x} = \dfrac{x^2}{t^2}$, $x(-1) = -\frac{1}{2}$;

6. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - 4}$, $y(1) = -6$;

7. $yy' = -x$, $y(4) = -3$;

8. $\dfrac{2y'}{1 - y^2} = \dfrac{2}{x}$, $y(1) = -\frac{5}{3}$;

9. $\dfrac{y'}{2\sqrt{y}} = e^x$, $y(2) = e^4 - 4e^2 + 4$;

10. $x' = \dfrac{(x+2)\cos(t)}{\sin(t) + 2}$, $x(0) = 0$;

11. $y' = -2x^3y^3$, $y(5) = \frac{1}{\sqrt{621}}$;

12. $\dfrac{e^y y'}{e^y - 1} = \dfrac{4}{x}$, $y(1) = \ln(2)$;

13. $y' = \cos(x)y^2$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

14. $y' - y^2 = 1$, $y(\pi) = 0$;

15. $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{x}$, $y(-2) = -3$;

16. $y' = 4t\sqrt{y}$, $y(0) = 1$;

17. $2y' + 1 = y^2$, $y(1) = \frac{1+2e}{1-2e}$;

18. $\dfrac{y'}{y-1} = \dfrac{3}{x}$, $y(1) = 2$;

19. $\dfrac{y'}{y-1} = -\dfrac{y}{x}$, $y(2) = -1$;

20. $2\sqrt{x}y' = y^2$, $y(9) = -1$;

21. $\dfrac{y'}{y+1} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

22. $\dot{x} = \dfrac{e^{-x}}{t}$, $x(1) = 0$;

23. $y' = \dfrac{1 - y^2}{1 - x^2}$, $y(0) = 0$.

Řešení

1. Podmínky z rovnice: $t \neq 0$.
Stacionární řešení: $x(t) = 0$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, také $x(t) = 1$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$. Separujeme a integrujeme: $\int \frac{dx}{x^2-x} = \int \frac{dt}{t}$, parciální zlomky

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\,dx = \ln|x-1| - \ln|x|.$$

Rovnice $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = \ln|t| + c$, $\frac{x-1}{x} = \pm e^c t$, obvyklý trik $C = \pm e^c \neq 0$, tedy $1 - \frac{1}{x} = Ct$, obecné řešení $x(t) = \frac{1}{1-Ct}$, $t \neq 0$, $t \neq \frac{1}{C}$, splňuje $x \neq 0$ a $x \neq 1$ díky $C \neq 0$ a $t \neq 0$.
Poznámka: Volba $C = 0$ dá stacionární řešení $x(t) = 1$, ale to $x(t) = 0$ takto získat nejde.
Počáteční podmínky:
a) $C = \frac{1}{2}$, tedy $x_a(t) = \frac{1}{1-t/2}$, $t \in (0, 2)$;
b) $C = -\frac{1}{4}$, tedy $x_b(t) = \frac{1}{1+t/4}$, $t \in (0, \infty)$;
c) $C = \frac{1}{2}$, tedy $x_c(t) = \frac{1}{1-t/2}$, $t \in (-\infty, 0)$;
d) $C = -\frac{1}{3}$, tedy $x_d(t) = \frac{1}{1+t/3}$, $t \in (0, \infty)$;
e) $C = 0$, tedy stacionární řešení $x_e(t) = 1$, $t \in (-\infty, 0)$;
f) C nejde, stacionární řešení $x_f(t) = 0$, $t \in (0, \infty)$;
g) $C = 2$, tedy $x_g(t) = \frac{1}{1-2t}$, $t \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$;
h) $x_h(t)$ neexistuje.

2. Podmínky z rovnice: $y \neq -1$.
Separace: $\int \frac{dy}{y+1} = -\int 4x^3 dx$. Stac. řeš.: kandidát $y(x) = -1$ vyloučen podmínkou.
Integrace: $\ln|y+1| = -x^4 + c$, obvyklý trik s $C = \pm e^c \neq 0$, obecné řešení: $y(x) = C\,e^{-x^4} - 1$.
Existence: Díky $C \neq 0$ je zajištěno $y \neq -1$, tedy $x \in \mathbb{R}$.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \to -1$.
Poč. podm.: $C = 1$, řešení $y(x) = e^{-x^4} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Podmínky z rovnice: $y \neq 0$
Separace: $\int 3y^2 dy = \int 1 dx$. Stac. řeš.: není.
Integrace: $y^3 = x + C$, obecné řešení: $y(x) = (x + C)^{1/3}$.
Existence: $y \neq 0 \implies x \neq -C$, dva intervaly.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \sim x^{1/3}$.
Poč. podm.: $C = -1$, řešení $y(x) = (x-1)^{1/3}$, $x \in (1, \infty)$.

4. Podmínky z rovnice: nejsou.
Separace: $\int e^y dy = \int e^x dx$. Stac. řeš.: není.
Integrace: $e^y = e^x + C$, obecné řešení: $y(x) = \ln(e^x + C)$.
Existence: $x \in \mathbb{R}$.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \sim \ln(e^x) = x$.
Poč. podm.: $C = 3$, řešení $y(x) = \ln(e^x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Podmínky z rovnice: $t \neq 0$.
Separace: $\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{dt}{t^2}$. Stac. řeš.: $x(t) = 0$, $t \neq 0$.
Integrace: $-\frac{1}{x} = -\frac{1}{t} - C$, obecné řešení: $x(t) = 0$ nebo $x(t) = \frac{-1}{-1/t-C} = \frac{t}{Ct+1}$, které splňuje $x \neq 0$ díky $t \neq 0$.
Existence: $t \neq 0$, $Ct + 1 \neq 0$, to znamená $t \neq -\frac{1}{C}$ pro $C \neq 0$.
Pro $t \sim \infty$ je $x(t) \sim \frac{1}{C}$ pro $C \neq 0$, pro $C = 0$ je $x(t) = t$, pro stac. řeš. je $x(t) = 0$.
Poč. podm.: $C = -1$, řešení $x(t) = \frac{t}{1-t}$, $t \in (-\infty, 0)$.

6. Podmínky z rovnice: $x \neq \pm 2$.
Separace: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x\,dx}{x^2-4}$. Stac. řeš.: $y(x) = 0$, $x \neq \pm 2$.
Integrace: substituce $w = x^2 - 4$, $\ln|y| = \ln|x^2 - 4| + c$, obvyklý trik s $C = \pm e^c \neq 0$, obecné řešení: $y(x) = 0$ nebo $y(x) = C(x^2 - 4)$, které splňuje $y \neq 0$ díky $C \neq 0$ a $x \neq \pm 2$. Volba $C = 0$ zahrne stacionární.
Existence: $x \neq \pm 2$.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \sim Cx^2$.
Poč. podm.: $C = 2$, řešení $y(x) = 2(x^2 - 4)$, $x \in (-2, 2)$.

7. Podmínky z rovnice: nejsou.
Separace: $\int y dy = -\int x\,dx$. Stac. řeš.: není.
Integrace: $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$, zvolíme $C = 2c$, obecné řešení: $y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$.

Existence: $C-x^2\geq 0$, pro $C<0$ to je $|x|\leq C$, jinak nemá smysl.
Poč. podm.: $C=25$, řešení $y(x)=-\sqrt{25-x^2}$, $x\in\langle -5,5\rangle$.

8. Podmínky z rovnice: $x\neq 0$, $y\neq\pm 1$.
Separace: $\int\frac{2\,dy}{1-y^2}=\int\frac{2}{x}\,dx$. Stac. řeš.: Kandidáti $y(x)=\pm 1$ vyloučeni podmínkou.
Integrace: parciální zlomky, $\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right|=2\ln|x|+c=\ln|x^2|+c=\ln(x^2)+c$, obvyklý trik s $C=\pm e^c\neq 0$, obecné řešení: $y(x)=\frac{Cx^2+1}{Cx^2-1}$, díky $C\neq 0$ je zajištěno $y\neq\pm 1$.
Existence: $x\neq 0$, $Cx^2-1\neq 0$, což dává omezení jen pro $C>0$, pak $x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{C}}$.
Pro $x\sim\infty$ je $y(x)\to 1$.
Poč. podm.: $C=\frac{1}{4}$, řešení $y(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4}$, $x\in(0,2)$.

9. Podmínky z rovnice: $y>0$.
Separace: $\int\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\int e^x dx$. Stac. řeš.: kandidát $y(x)=0$ vyloučen podmínkou.
Integrace: $\sqrt{y}=e^x+C$, pozor odtud podmínka $e^x+C\geq 0$, obecné řešení: $y(x)=(e^x+C)^2$.
Existence: $e^x+C>0$, pro $C<0$ to je $x>\ln(-C)$, pro $C\geq 0$ je $x\in I\!R$.
Pro $x\sim\infty$ je $y(x)\sim e^{2x}$.
Poč. podm.: $y(2)=e^4-4e^2+4$, řešení $C=-2$, $y(x)=(e^x-2)^2$, $x\in(\ln(2),\infty)$.

10. Podmínky z rovnice: nejsou.
Separace: $\int\frac{dx}{x+2}=\int\frac{\cos(t)}{\sin(t)+2}\,dt$. Stac. řeš.: $x(t)=-2$.
Integrace: substituce $w=\sin(t)+2$, $\ln|x+2|=\ln|\sin(t)+2|+c$, obvyklý trik s $C=\pm e^c\neq 0$, obecné řešení: $x(t)=-2$ nebo $x(t)=C(\sin(t)+2)-2$, kde $x\neq -2$ díky $\sin(t)+2\neq 0$ a $C\neq 0$. Volba $C=0$ zahrne i stacionární.
Existence: $t\in I\!R$.
Pro $x\sim\infty$ se řešení nedá zjednodušit. Je omezené.
Poč. podm.: $C=1$, řešení $x(t)=\sin(t)$, $t\in I\!R$.

11. Podmínky z rovnice: nejsou.
Separace: $\int\frac{dy}{y^3}=-\int 2x^3dx$. Stac. řeš.: $y(x)=0$.
Integrace: $\frac{-1}{2y^2}=-\frac{1}{2}x^4+c$, trik $C=2c$, obecné řešení: $y(x)=0$ nebo $y(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{x^4-C}}$, které splňuje $y\neq 0$.
Existence: $x^4-C>0$, pro $C\geq 0$ pak $x\in I\!R$, pro $C<0$ je $|x|>C^{1/4}$.
Pro $x\sim\infty$ je $y(x)\sim\pm\frac{1}{x^2}$.
Poč. podm.: $C=4$, řešení $y(x)=\frac{1}{\sqrt{x^4-4}}$, $x\in(\sqrt{2},\infty)$.

12. Podmínky z rovnice: $x\neq 0$, $y\neq 0$.
Separace: $\int\frac{e^y\,dy}{e^y-1}=\int\frac{4}{x}dx$. Stac. řeš.: kandidát $y(x)=0$ vyloučen podmínkou.
Integrace: substituce $w=e^y-1$, $\ln|e^y-1|=4\ln|x|+c=\ln(x^4)+c$, obvyklý trik s $C=\pm e^c\neq 0$, obecné řešení: $y(x)=\ln(Cx^4+1)$.
Existence: $Cx^4+1>0$, pro $C<0$ to znamená $|x|<|C|^{1/4}$, pro $C>0$ pak $x\in I\!R$; máme také $x\neq 0$; případ $y=0$ nenastane díky $C\neq 0$ a $x\neq 0$.
Pro $C>0$ má smysl $x\sim\infty$, pak je $y(x)\sim 4\ln(x)$.
Poč. podm.: $C=1$, řešení $y(x)=\ln(x^4+1)$, $x\in(0,\infty)$.

13. Podmínky z rovnice: nejsou.
Separace: $\int\frac{dy}{y^2}=\int\cos(x)dx$. Stac. řeš.: $y(x)=0$.
Integrace: $-\frac{1}{y}=\sin(x)+C$, obecné řešení: $y(x)=\frac{-1}{\sin(x)+C}$.
Existence: $\sin(x)+C\neq 0$, význam závisí na C.
Není zjevné, zda lze vůbec jít $x\to\infty$. I kdyby to šlo, $y(x)$ nelze zjednodušit.
Poč. podm.: $C=-2$, řešení $y(x)=\frac{1}{2-\sin(x)}$, $x\in I\!R$.

14. Podmínky z rovnice: nejsou.
Separace: $y'=1+y^2\implies\int\frac{dy}{y^2+1}=\int 1dx$. Stac. řeš.: Neex.
Integrace: $\arctan(y)=x+C$, obecné řešení: $y(x)=\tan(x+C)$.
Existence: $x\neq\frac{\pi}{2}-C+k\pi$.
Funkce neexistuje na okolí nekonečna, nemá smysl se ptát na $x\sim\infty$.
Poč. podm.: $C=0$, řešení $y(x)=\tan(x)$, $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

15. Podmínky z rovnice: $x, y \neq 0$.
Separace: $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x} dx$. Stac. řeš.: kandidát $y(x) = 0$ vyloučen podmínkou.
Integrace: $\ln|y| = -\ln|x| + c = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + c$, obvyklý trik s $C = \pm e^c \neq 0$, obecné řešení: $y(x) = \frac{C}{x}$.
Existence: $x \neq 0$, díky $C \neq 0$ nenastane $y = 0$.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \to 0$.
Poč. podm.: $C = 6$, řešení $y(x) = \frac{6}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$.

16. Podmínky z rovnice: $y \geq 0$.
Separace: $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 4t\,dt$. Stac. řeš.: $y(x) = 0$.
Integrace: $2\sqrt{y} = 2t^2 + c$, trik $C = \frac{1}{2}c$, tedy $\sqrt{y} = t^2 + C$, proto $t^2 + C \geq 0$, obecné řešení: $y(x) = 0$ nebo $y(t) = (t^2 + C)^2$.
Existence: $t^2 + C \geq 0$, pro $C \geq 0$ to je $t \in \mathbb{R}$, pro $C < 0$ je $|t| \geq \sqrt{|C|}$.
Pak může nastat $(t^2 + C)^2 = 0$, tedy může dojít k napojování obecných řešení se stacionárním.
Pro $x \sim \infty$ je $y(t) \sim t^4$.
Poč. podm.: $C = 1$, řešení $y(t) = (t^2 + 1)^2$, $t \in \mathbb{R}$. Nedojde k $y(t) = 0$, proto jednoznačnost.
Poznámka: Například počáteční podmínka $y(2) = 1$ dává $y(t) = (t^2 - 1)^2$, pak pro $t = 1$ je $y(t) = 0$ a je třeba zkoumat možnost napojení na stacionární řešení. Funkce daná

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1; \\ (t^2-1)^2, & t \geq 1 \end{cases}$$

je spojitá a splňuje rovnici na $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$. V bodě $t = 1$ mají oba vzorce derivaci nulovou, tedy funkce f je diferencovatelná na $\mathbb{R}$ a splňuje tam rovnici. Obdobně ukážeme, že se lze na $y(t) = 0$ napojit v libovolném bodě $t = -\sqrt{D}$ pomocí funkce $(t^2 - D)^2$, takže existuje nekonečně mnoho maximálních řešení splňujících podmínku $y(2) = 1$, pro libovolné $D \geq 0$ to je

$$f(t) = \begin{cases} (t^2-D)^2, & t \leq -\sqrt{D}; \\ 0, & -\sqrt{D} \leq t \leq 1; \\ (t^2-1)^2, & t \geq 1. \end{cases}$$

17. Podmínky z rovnice: nejsou.
Separace: $2dy = y^2 - 1 \implies \int \frac{2dy}{y^2-1} = \int 1\,dx$. Stac. řeš.: $y(x) = \pm 1$.
Integrace: $\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + c$, obvyklý trik s $C = \pm e^c \neq 0$, obecné řešení: $y(x) = -1$ nebo $y(x) = 1$ nebo $y(x) = \frac{1+C\,e^x}{1-C\,e^x}$, což díky $C \neq 0$ splňuje $y \neq \pm 1$. Volba $C = 0$ zahrne $y(x) = 1$.
Existence: $1 - C\,e^x \neq 0$, pro $C < 0$ dává $x \in \mathbb{R}$, pro $C > 0$ dává $x \neq \ln(1/C)$ neboli $x \neq -\ln(C)$.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \to -1$.
Poč. podm.: $C = 2$, řešení $y(x) = \frac{1+2e^x}{1-2e^x}$, $x \in (-\ln(2), \infty)$.

18. Podmínky z rovnice: $y \neq 1$, $x \neq 0$.
Separace: $\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{3}{x}\,dx$. Stac. řeš.: kandidát $y(x) = 1$ vyloučen podmínkou.
Integrace: $\ln|y-1| = 3\ln|x| + c = \ln|x^3| + c$, obvyklý trik s $C = \pm e^c \neq 0$, obecné řešení: $y(x) = 1 + Cx^3$, nenastane $y = 1$ díky $C \neq 0$ a $x \neq 0$.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \sim Cx^3$.
Poč. podm.: $C = 1$, řešení $y(x) = 1 + x^3$, $x \in (0, \infty)$.

19. Podmínky z rovnice: $x \neq 0$, $y \neq 1$.
Separace: $\int \frac{dy}{y^2-y} = -\int \frac{1}{x}\,dx$. Stac. řeš.: $y(x) = 0$, kandidát $y(x) = 1$ vyloučen podmínkou.
Integrace: parciální zlomky, $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = -\ln|x| + c = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + c$, obvyklý trik s $C = \pm e^c \neq 0$, obecné řešení: $y(x) = 0$ nebo $y(x) = \frac{1}{1-C/x} = \frac{x}{x-C}$, nenastane $y = 0$ díky $x \neq 0$.
Existence: $x \neq 0$, $x - C \neq 0$; díky $C \neq 0$ nenastane $y = 1$.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \to 1$.
Poč. podm.: $C = -4$, řešení $y(x) = \frac{x}{x-4}$, $x \in (0, 4)$.

20. Podmínky z rovnice: $x \geq 0$.
Separace: $\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Stac. řeš.: $y(x) = 0$.
Integrace: $-\frac{1}{y} = \sqrt{x} + C$, obecné řešení: $y(x) = 0$ nebo $y(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}+C}$, kde $y \neq 0$. Stacionární nelze zahrnout volbou C.

Existence: $x \geq 0$, $\sqrt{x} + C > 0$ což pro $C > 0$ dá $x \geq 0$, pro $C \leq 0$ dá $x \neq C^2$.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \sim \frac{-1}{\sqrt{x}}$ a $y(x) \to 0$.
Poč. podm.: $C = -2$, řešení $y(x) = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$, $x \in (4, \infty)$.

21. Podmínky z rovnice: $y \neq -1$, $x \neq k\pi$.
Separace: $\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx$. Stac. řeš.: kandidát $y(x) = -1$ vyloučen podmínkou.
Integrace: substituce $w = \sin(x)$, $\ln|y+1| = \ln|\sin(x)| + c$, obvyklý trik s $C = \pm e^c \neq 0$, obecné řešení: $y(x) = C\sin(x) - 1$, splňuje $y \neq -1$ díky $C \neq 0$ a $k \neq k\pi$.
Existence: $x \neq k\pi$.
Řešení neexistuje na okolí nekonečna, nemá smysl se ptát na $x \sim \infty$.
Poč. podm.: $C = 2$, řešení $y(x) = 2\sin(x) - 1$, $x \in (0, \pi)$.

22. Podmínky z rovnice: $t \neq 0$.
Separace: $\int e^x dx = \int \frac{dt}{t}$. Stac. řeš.: Není.
Integrace: $e^x = \ln(t) + C$, obecné řešení: $x(t) = \ln(\ln(t) + C)$.
Existence: $t > 0$, $\ln(t) + C > 0$ neboli $t > e^{-C}$.
Pro $t \sim \infty$ je $x(t) \sim \ln(\ln(t))$.
Poč. podm.: $C = 1$, řešení $x(t) = \ln(\ln(t) + 1)$, $x \in \left(\frac{1}{e}, \infty\right)$.

23. Podmínky z rovnice: $x \neq \pm 1$.
Separace: $\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{dx}{1-x^2}$. Stac. řeš.: $y(x) = \pm 1$.
Integrace: parciální zlomky, $\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$, obvyklý trik s $C = \pm e^c \neq 0$, obecné řešení: $y(x) = -1$ nebo $y(x) = 1$ nebo $y(x) = \frac{C(x+1)+(x-1)}{C(x+1)-(x-1)}$, kde $y \neq \pm 1$ díky $C \neq 0$ a $x \neq \pm 1$. Volba $C = 0$ zahrne $y(x) = -1$, druhé stacionární řešení zahrnout nelze.
Existence: $x \neq \pm 1$, dále $C(x+1) - (x-1) \neq 0$ neboli $x \neq \frac{C+1}{C-1}$ pro $C \neq 1$ jinak nic nevynucuje.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \sim \frac{C+1}{C-1}$ pokud $C \neq 1$ jinak $y(x) = x$.
Poč. podm.: $C = 1$, řešení $y(x) = x$, $x \in (-1, 1)$.