ODR: Cvičné příklady—homogenní lineární diferenciální rovnice

Pro následující rovnice najděte jejich obecné řešení a diskutujte jeho typické asymptotické chování na okolí nekonečna.
Případně najděte partikulární řešení pro zadané počáteční podmínky.

1. $y'' + y' - 6y = 0$,
$y(1) = e^2$, $y'(1) = 2\,e^2$;

2. $y'' - y' = 0$,
$y(-1) = 13$, $y'(-1) = 0$;

3. $x'' + 9x = 0$,
$x(\pi) = 0$, $x'(\pi) = 3$;

4. $y'' - 3y' + 2y = 0$,
$y(0) = 3$, $y'(0) = 4$;

5. $x'' - 6x' + 9x = 0$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 3$;

6. $y'' - 2y = 0$,
$y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

7. $y'' - 6y' + 13y = 0$,
$y(0) = 0$, $y'(0) = 2$;

8. $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $\quad \omega \in \mathbb{N}$,
$x(2\pi) = 1$, $\dot{x}(2\pi) = \omega$

9. $y'' - A^2 y = 0$, $\quad A > 0$,
$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

10. $x''' - x'' - 2x' = 0$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = -1$;

11. $y''' - 2y'' + 10y' = 0$;

12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$;

13. $x''' - A^2 x' = 0$, $A > 0$,
$x(0) = 1$, $x'(0) = 2A$, $x''(0) = 0$;

14. $y'''' - 2y''' + y'' = 0$;

15. $x^{(4)} - x'' = 0$,
$x(1) = 14$, $x'(1) = 1$, $x''(0) = 0$, $x'''(0) = 0$;

16. $y^{(4)} - y = 0$.

Bonus:
Bonusové otázky pro příklad 5.:
a) Najděte nějaké počáteční podmínky pro $t_0 = 0$ tak, aby odpovídající řešení splňovalo $x(2) = 2e^6$, $x'(2) = 7e^6$.
b) Najděte nějaké počáteční podmínky pro $t_0 = 0$ tak, aby odpovídající řešení rostlo v nekonečnu asymptotickou rychlostí nejvýše $O(e^{3t})$.

17. Uvažujte rovnici $y'' + 4y' + py = 0$, kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr.
Určete hodnoty p, pro které všechna řešení budou konvergovat k nule v nekonečnu.

18. Uvažujte rovnici $y'' - 2y' + \frac{1}{2}py = 0$, kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr.
Určete hodnoty p, pro které se bude přirozený fundamentální systém skládat z monotonních funkcí.

19. Uvažujte rovnici $y'' + py' + qy = 0$, kde $p, q \in \mathbb{R}$ jsou parametry.
Určete hodnoty p, q, pro které budou všechna řešení omezená na $\mathbb{R}$.

20. Uvažujte rovnici $y'' + py' + qy = 0$, kde $p, q \in \mathbb{R}$ jsou parametry.
Určete hodnoty p, q, pro které budou všechna řešení zároveň konvexní a konkávní.

Řešení

1. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$, char. čísla $\lambda = -3, 2$;
fund. systém: $\{e^{-3x}, e^{2x}\}$, obecné řešení: $y(x) = a\,e^{-3x} + b\,e^{2x}$, $x \in I\!R$.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \sim b\,e^{2x}$.
Poč. podm.: $y(x) = e^{2x}$, $x \in I\!R$.

2. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$, char. čísla $\lambda = 0, 1$;
fund. systém: $\{e^0 = 1, e^x\}$; obecné řešení: $y(x) = a + b\,e^x$, $x \in I\!R$.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \sim b\,e^x$.
Poč. podm.: $y(x) = 13$, $x \in I\!R$.

3. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 + 9$, char. čísla $\lambda = \pm 3i$;
fund. systém: $\{\sin(3t), \cos(3t)\}$; obecné řešení: $x(t) = a\sin(3t) + b\cos(3t)$, $t \in I\!R$.
Pro $t \sim \infty$ funkci nelze asymptoticky zjednodušit, řešení je omezené.
Poč. podm.: $x(t) = -\sin(3t)$, $t \in I\!R$.

4. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, char. čísla $\lambda = 1, 2$;
fund. systém: $\{e^x, e^{2x}\}$; obecné řešení: $y(x) = a\,e^x + b\,e^{2x}$, $x \in I\!R$.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \sim b\,e^{2x}$.
Poč. podm.: $y(x) = 2e^x + e^{2x}$, $x \in I\!R$.

5. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$, char. čísla $\lambda = 3$ $(2\times)$;
fund. systém: $\{e^{3t}, t\,e^{3t}\}$; obecné řešení: $x(t) = a\,e^{3t} + b\,t\,e^{3t}$, $t \in I\!R$.
Pro $t \sim \infty$ je $x(t) \sim bt\,e^{3t}$.
Poč. podm.: $x(t) = 3t\,e^{3t}$, $t \in I\!R$.

Bonus: a) Z daných podmínek vyjde žádané řešení$x(t) = t\,e^{3t}$. V čase $t_0 = 0$ splňuje $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, což jsou žádané počáteční podmínky.
b) Aby obecné řešení $x(t) = a\,e^{3t} + b\,t\,e^{3t}$ rostlo asymptoticky jako e^{3t}, potřebujeme zabránit výskytu dominantního členu $t\,e^{3t}$, tedy chceme $b = 0$.
Například $x(t) = e^{3t}$ vyhovuje, odpovídající počáteční podmínky jsou $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$.
Jakákoliv odpověď typu $x(0) = a$, $x'(0) = 3a$ pro nějaké $a \in I\!R$ je správně. Mimochodem, správné podmínky (odpovědi) lze rozeznat testem $x'(0) = 3x(0)$.
Opravdu? A co $x(0) = x'(0) = 0$? Odpovídající řešení $x(t) = 0$ roste rychlostí $O(1) = O(t^0)$, co je ale také $O(e^{3t})$, protože to druhé dominuje. Takže to opravdu funguje.

6. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 2$, char. čísla $\lambda = \pm\sqrt{2}$;
fund. systém: $\{e^{-\sqrt{2}x}, e^{\sqrt{2}x}\}$; obecné řešení: $y(x) = a\,e^{-\sqrt{2}x} + b\,e^{\sqrt{2}x}$, $x \in I\!R$.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \sim b\,e^{\sqrt{2}x}$.
Poč. podm.: $y(x) = e^{-\sqrt{2}x} + e^{\sqrt{2}x}$, $x \in I\!R$.

7. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 13$, char. čísla $\lambda = 3 \pm 2i$;
fund. systém: $\{e^{3x}\sin(2x), e^{3x}\cos(2x)\}$; obecné řešení: $y(x) = a\,e^{3x}\sin(2x) + b\,e^{3x}\cos(2x)$, $x \in I\!R$.
Pro $x \sim \infty$ funkci nelze asymptoticky zjednodušit.
Poč. podm.: $y(x) = e^{3x}\sin(2x)$, $x \in I\!R$.

8. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$, char. čísla $\lambda = \pm\omega i$;
fund. systém: $\{\sin(\omega t), \cos(\omega t)\}$; obecné řešení: $x(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$, $t \in I\!R$.
Pro $t \sim \infty$ funkci nelze asymptoticky zjednodušit, řešení je omezené.
Poč. podm.: $x(t) = \sin(\omega t) + \cos(\omega t)$, $t \in I\!R$.

9. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - A^2$, char. čísla $\lambda = \pm A$;
fund. systém: $\{e^{-Ax}, e^{Ax}\}$; obecné řešení: $y(x) = a\,e^{-Ax} + b\,e^{Ax}$, $x \in I\!R$.
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \sim b\,e^{Ax}$.
Poč. podm.: $y(x) = \frac{1}{2}e^{-Ax} + \frac{1}{2}e^{Ax} = \cosh(Ax)$, $x \in I\!R$.

10. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2)$, char. čísla $\lambda = 0, -1, 2$;
fund. systém: $\{1, e^{-t}, e^{2t}\}$; obecné řešení: $x(t) = a + b\,e^{-t} + c\,e^{2t}$, $t \in I\!R$.
Pro $t \sim \infty$ je $x(t) \sim c\,e^{2t}$.
Poč. podm.: $x(t) = 1 - e^{-t}$, $t \in I\!R$.

11. Char. pol. $p(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2+10\lambda=\lambda(\lambda^2-2\lambda+10)$, char. čísla $\lambda=0,1\pm 3i$;
fund. systém: $\{1, e^x\sin(3x), e^x\cos(3x)\}$; obecné řešení: $y(x)=a+b\,e^x\sin(3x)+c\,e^x\cos(3x)$, $x\in I\!R$.
Pro $x\sim\infty$ funkci nelze asymptoticky zjednodušit.

12. Char. pol. $p(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3$, char. čísla $\lambda=1$ $(3\times)$;
fund. systém: $\{e^x, x\,e^x, x^2\,e^x\}$; obecné řešení: $y(x)=a\,e^x+bx\,e^x+cx^2e^x=(a+bx+cx^2)e^x$, $x\in I\!R$.
Pro $x\sim\infty$ je $y(x)\sim cx^2e^x$.

13. Char. pol. $p(\lambda)=\lambda^3-A^2\lambda=\lambda(\lambda+A)(\lambda-A)$, char. čísla $\lambda=0,\pm A$;
fund. systém: $\{1, e^{-At}, e^{At}\}$; obecné řešení: $x(t)=a+b\,e^{-At}+c\,e^{At}$, $t\in I\!R$.
Pro $t\sim\infty$ je $x(t)\sim c\,e^{At}$.
Poč. podm.: $x(t)=1-e^{-At}+e^{At}=1-2\sinh(At)$, $t\in I\!R$.

14. Char. pol. $p(\lambda)=\lambda^4-2\lambda^3+\lambda^2=\lambda^2(\lambda-1)^2$, char. čísla $\lambda=0$ $(2\times)$, 1 $(2\times)$;
fund. systém: $\{1, x, e^x, x\,e^x\}$; obecné řešení: $y(x)=a+bx+c\,e^x+dx\,e^x$, $x\in I\!R$.
Pro $x\sim\infty$ je $y(x)\sim dx\,e^x$.

15. Char. pol. $p(\lambda)=\lambda^4-\lambda^2=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)$, char. čísla $\lambda=0$ $(2\times)$, ±1;
fund. systém: $\{1, t, e^{-t}, e^t\}$; obecné řešení: $x(t)=a+bt+c\,e^{-t}+d\,e^t$, $t\in I\!R$.
Pro $t\sim\infty$ je $x(t)\sim d\,e^t$.
Poč. podm.: $x(t)=13+t$, $t\in I\!R$.

16. Char. pol. $p(\lambda)=\lambda^4-1=(\lambda^2+1)(\lambda^2-1)=(\lambda^2+1)(\lambda+1)(\lambda-1)$, char. čísla $\lambda=\pm1,\pm i$;
fund. systém: $\{e^{-x}, e^x, \sin(x), \cos(x)\}$; obecné řešení: $y(x)=ae^{-x}+b\,e^x+c\sin(x)+d\cos(x)$, $x\in I\!R$.
Pro $x\sim\infty$ je $y(x)\sim b\,e^x$.

17. $\lambda=\frac{-4\pm\sqrt{16-4p}}{2}=-2\pm\sqrt{4-p}$.
Případy: $p>4$: komplexní λ, řešení typu $a\,e^{-2x}\cos(\omega x)+b\,e^{-2x}\sin(\omega x)$, ta jdou do nuly. Takže OK.
$p=4$: Dvojnásobná λ, řešení $a\,e^{-2x}+bx\,e^{-2x}$, to také jde do nuly (víme $\frac{x}{e^{2x}}\to 0$), takže OK.
$p<4$: Dvě reálná řešení, nesmíme dovolit, aby vznikla nula nebo kladné číslo, tedy chceme $-2+\sqrt{4-p}<0$, odtud $p>0$. Takže bereme p z $(0,4)$.
Závěr: Vyhovuje $p>0$.

18. $\lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-2p}}{2}=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-2p}$.
Případy: $p>2$: fundamentální systém je $\{e^x\cos(\omega x), e^x\sin(\omega x)\}$, funkce nejsou monotonní, to nechceme.
$p=2$: Dvojnásobná λ, fund. systém $\{e^x, x\,e^x\}$. První funkce je rostoucí, co $x\,e^x$? Máme $[x\,e^x]'=(1+x)e^x$, může být kladné i záporné, proto $x\,e^x$ není monotonní, to nechceme.
$p<2$: Dvě reálná řešení, tedy dvě exponenciály, popřípadě pro $\lambda=0$ konstanta. Ta je monotonní, exponenciály také, to chceme.
Závěr: Vyhovuje $p<2$.

19. $\lambda=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=-\frac{1}{2}p\pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$.
Případy: $p\neq 0$: Pak alespoň jedna z lambd má nenulovou reálnou část, v odpovídajícím řešení se vyskytuje exponenciála a ta není omezená na $I\!R$. Toto nechceme. Musí být $p=0$
$p=0$: Then $\lambda=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-4q}=\pm\sqrt{-q}$.
Pokud $q<0$, dostaneme dvě reálné λ a zase vznikají exponenciály. To nechceme.
Pokud $q=0$, vznikne dvojnásobná $\lambda=0$, obecné řešení $a+bx$. To nemusí být omezené, to nechceme.
Pokud $q>0$, bude řešení $a\cos(\sqrt{-q}x)+b\sin(\sqrt{-q}x)$, to je omezené, to chceme.
Závěr: Vyhovuje $p=0$ a $q>0$.

20. $\lambda=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=-\frac{1}{2}p\pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$.
Rozbor: Jediné funkce, které jsou zároveň konvexní a konkávní, jsou funkce lineární, tedy ve tvaru $a+bx$. Abychom je dostali coby řešení, musí být dvojnásobný kořen $\lambda=0$. Takže $\sqrt{p^2-4q}=0$ neboli $q=\frac{1}{4}p^2$, pak vyjde $\lambda=-\frac{1}{2}p$ a je jasno.
Závěr: Vyhovuje $p=0$ a $q=0$.