ODR: Cvičné příklady—lineární diferenciální rovnice

1. Pro každou z následujících levých stran lineárních rovnic s konstantními koeficienty
a) $y'' - 4y' + 3y$; b) $y'' - 2y' + 5y$; c) $y''' - 4y'' + 13y'$; d) $y^{(4)} + 9y''$
najděte metodou odhadu obecnou formu partikulárního řešení (tedy nemusíte dopočítávat hodnotu koeficientů) pro všechny následující speciální pravé strany:
α) $(x+1)e^{3x}$; β) x^2+1; γ) $12\sin(3x)$;
δ) $(x^2-3)e^{2x}$; ε) $2e^x\sin(2x) + (x-1)e^x\cos(2x)$.

Najděte obecné řešení následujících rovnic:

2. $y''' - 2y'' = 2e^x - 1$;

3. $x'' - 3x' + 2x = \sin(t) - t\cos(t) - 1$;

4. $x'' - 3x' + 2x = 2e^t + 2t^2 - 1$;

5. $y'' + 4y = 1 + 2\sin(2x)$;

6. $y'' - 2y' = 2x - 1 + x\,e^x$;

7. $y'' - 2y' = 5\sin(x) + 10\cos(x) - 8\cos(2x)$.

Vyřešte následující Cauchyho (počáteční) úlohy:

8. $y'' - 2y' = 2e^{2x} - 5\cos(x) + 6$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$;

9. $y'' - 7y' + 12y = e^{4x} + 12x - 19$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$;

10. $y'' - 6y' + 9y = 4e^x + 9x + 12$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$;

11. $y'' - 4y' + 5y = 8\sin(x) + 25x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 6$;

12. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 6e^x - 4x$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -2$;

13. $x'' - 2x' = 2\sinh(2t)$, $x(0) = -\frac{1}{8}$, $x'(0) = \frac{1}{4}$;

14. $y'' - 4y = 13\sin(3x) - 5\cos(x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$;

15. $y'' + 4y = 9t\sin(t) - 5e^t$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$;

16. $y'' - 3y' + 2y = 2x + (\pi^4 + 5\pi^2 + 4)\sin(\pi x)$, $y(1) = \frac{5}{2} - 3\pi + e$, $y'(1) = 1 - \pi(2 - \pi^2) + e$;

17. $\ddot{x} + x = \sin(t) + e^t\sin(t)$, $x(0) = -\frac{2}{5}$, $\dot{x}(0) = \frac{13}{10}$.

Řešení

1.

a: Levá strana $y'' - 4y' + 3y = \cdots$: Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$, char. čísla $\lambda = 1, 3$.

aα) $y'' - 4y' + 3y = (x+1)e^{3x}$: Levá strana: $\lambda = 1, 3$;
pravá strana: stupeň polynomu je 1, nejsou siny/kosiny, tedy $\lambda = 3 + 0i = 3$, má překryv s levou stranou násobnosti $m = 1$, proto odhad $y_p(x) = x^1(Ax + B)e^{3\cdot x} = (Ax^2 + Bx)e^{3x}$.

aβ) $y'' - 4y' + 3y = x^2 + 1$: Levá strana: $\lambda = 1, 3$;
pravá strana: stupeň polynomu je 2, nejsou exponenciály ani siny/kosiny, tedy $\lambda = 0 + 0i = 0$, nemá překryv s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$.

aγ) $y'' - 4y' + 3y = 12\sin(3x)$: Levá strana: $\lambda = 1, 3$;
pravá strana: stupeň polynomu je 0, nejsou exponenciály, tedy $\lambda = 0 + 3i = 3i$, překryv s levou stranou není, proto odhad $y_p(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x)$.

aδ) $y'' - 4y' + 3y = (x^2 - 3)e^{2x}$: Levá strana: $\lambda = 1, 3$;
pravá strana: stupeň polynomu je 2, nejsou siny/kosiny, tedy $\lambda = 2 + 0i = 2$, není překryv s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$.

aε) $y'' - 4y' + 3y = 2e^x\sin(2x) + (x-1)e^x\cos(2x)$: Levá strana: $\lambda = 1, 3$;
pravá strana: Je exponenciála i (ko)sinus, proto $\lambda = 1 + 2i$, není překryv, tedy $m = 0$; max. stupeň polynomu je $d = 1$; máme proto $y_p(x) = e^x[(Ax + B)\sin(2x) + (Cx + D)\cos(2x)]$.

b: Levá strana $y'' - 2y' + 5y = \cdots$: Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$, char. čísla $\lambda = 1 \pm 2i$;

bα) $y'' - 2y' + 5y = (x+1)e^{3x}$: Levá strana: $\lambda = 1 \pm 2i$;
pravá strana: stupeň polynomu je 1; máme $\lambda = 3 + 0i = 3$, bez překryvu s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = (Ax + B)e^{3x}$.

bβ) $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1$: Levá strana: $\lambda = 1 \pm 2i$;
pravá strana: stupeň polynomu je 2, máme $\lambda = 0 + 0i = 0$, bez překryvu s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$.

bγ) $y'' - 2y' + 5y = 12\sin(3x)$: Levá strana: $\lambda = 1 \pm 2i$;
pravá strana: stupeň polynomu je 0; máme $\lambda = 0 + 3i = 3i$, není překryv s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x)$.

bδ) $y'' - 2y' + 5y = (x^2 - 3)e^{2x}$:
Levá strana: $\lambda = 1 \pm 2i$;
pravá strana: stupeň polynomu je 2, máme $\lambda = 2 + 0i = 2$, bez překryvu s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$.

bε) $y'' - 2y' + 5y = 2e^x\sin(2x) + (x-1)e^x\cos(2x)$: Levá strana: $\lambda = 1 \pm 2i$;
pravá strana: maximální stupeň polynomu je $d = 1$; máme $\lambda = 1 + 2i$, je zde překryv s levou stranou, násobnost překryvu je $m = 1$; proto odhad $y_p(x) = x^1e^x[(Ax + B)\sin(x) + (Cx + D)\cos(x)]$
$= e^x[(Ax^2 + Bx)\sin(2x) + (Cx^2 + Dx)\cos(2x)]$.

c: Levá strana $y''' - 4y'' + 13y' = \cdots$: Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 13\lambda$, char. čísla $\lambda = 0, 2 \pm 3i$;

cα) $y''' - 4y'' + 13y' = (x+1)e^{3x}$: Levá strana: $\lambda = 0, 2 \pm 3i$;
pravá strana: stupeň polynomu je 1; máme $\lambda = 3 + 0i = 3$, bez překryvu s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = (Ax + B)e^{3x}$.

cβ) $y''' - 4y'' + 13y' = x^2 + 1$: Levá strana: $\lambda = 0, 2 \pm 3i$;
pravá strana: stupeň polynomu je 2; máme $\lambda = 0 + 0i = 0$, je zde jednonásobný překryv s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = x^1(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$.

cγ) $y''' - 4y'' + 13y' = 12\sin(3x)$: Levá strana: $\lambda = 0, 2 \pm 3i$;
pravá strana: stupeň je $d = 0$; máme $\lambda = 0 + 3i = 3i$, bez překryvu s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x)$.

cδ) $y''' - 4y'' + 13y' = (x^2-3)e^{2x}$: Levá strana: $\lambda = 0, 2 \pm 3i$;
pravá strana: stupeň polynomu je 2; máme $\lambda = 2 + 0i = 2$, bez překryvu s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$.

cε) $y''' - 4y'' + 13y' = 2e^x\sin(2x) + (x-1)e^x\cos(2x)$: Levá strana: $\lambda = 0, 2 \pm 3i$;
pravá strana: max. stupeň polynomu je $d = 1$, máme $\lambda = 1+2i$, bez překryvu s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = e^x[(Ax+B)\sin(2x) + (Cx+D)\cos(2x)]$.

dα) Levá strana: $y^{(4)} + 9y'' = \cdots$:
Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^4 + 9\lambda^2$, char. čísla $\lambda = 0\ (2\times), \pm 3i$;

dα) $y^{(4)} + 9y'' = (x+1)e^{3x}$: Levá strana: $\lambda = 0\ (2\times), \pm 3i$;
pravá strana: stupeň polynomu je 1; máme $\lambda = 3 + 0i = 3$, bez překryvu s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = (Ax+B)e^{3x}$.

dβ) $y^{(4)} + 9y'' = x^2 + 1$: Levá strana: $\lambda = 0\ (2\times), \pm 3i$;
pravá strana: stupeň polynomu je 2; máme $\lambda = 0 + 0i = 0$, je překryv s levou stranou o násobnosti $m = 2$; proto odhad $y_p(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$.

dγ) $y^{(4)} + 9y'' = 12\sin(3x)$: Levá strana: $\lambda = 0\ (2\times), \pm 3i$;
pravá strana: stupeň polynomu je 0; máme $\lambda = 0+3i = 3i$, překryv s levou stranou násobnosti $m = 1$; proto odhad $y_p(x) = x^1[\sin(3\cdot x) + B\cos(3\cdot x)] = Ax\sin(3x) + Bx\cos(3x)$.

dδ) $y^{(4)} + 9y'' = (x^2-3)e^{2x}$: Levá strana: $\lambda = 0\ (2\times), \pm 3i$;
pravá strana: stupeň polynomu je 2; máme $\lambda = 2 + 0i = 2$, bez překryvu s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$.

dε) $y^{(4)} + 9y'' = 2e^x\sin(2x) + (x-1)e^x\cos(2x)$: Levá strana: $\lambda = 0\ (2\times), \pm 3i$;
pravá strana: max. stupeň polynomu je $d = 1$; máme $\alpha = 1+2i$, bez překryvu s levou stranou, proto odhad $y_p(x) = e^x[(Ax+B)\sin(2x) + (Cx+D)\cos(2x)]$.

2. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2$, char. čísla $\lambda = 0\ (2\times), 2$; fund. syst. $\{1, x, e^{2x}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je
$y_h(x) = a + bx + c\,e^{2x}$, $x \in I\!R$.
Pravá strana je speciální, přesněji kombinace dvou speciálních pravých stran.
• $2e^x$: $d = 0$; $\lambda = 1 + 0i = 1$, bez překryvu, proto $y_1(x) = A\,e^x$.
• -1: $d = 0$; $\lambda = 0 + 0i = 0$, překryv s levou stranou násobnosti $m = 2$; proto
$y_2(x) = x^2C = Cx^2$.
Odhad partikulárního řešení $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = A\,e^x + Cx^2$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme
$$-A\,e^x - 4C = 2e^x - 1,\ \text{odtud}\ A = -2,\ C = \tfrac{1}{4},$$
obecné řešení je $y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2e^x + a + bx + c\,e^{2x}$, $x \in I\!R$.

3. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, char. čísla $\lambda = 1, 2$; fund. syst. $\{e^t, e^{2t}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je $x_h(t) = a\,e^t + b\,e^{2t}$, $t \in I\!R$.
Pravá strana je speciální, přesněji kombinace dvou speciálních pravých stran.
• $\sin(t) - t\cos(t)$: $d = 1$; $\lambda = 0 + 1i = i$, bez překryvu s levou stranou, proto
$x_1(t) = (At+B)\sin(t) + (Ct+D)\cos(t)$.
• -1: $d = 0$; $\lambda = 0 + 0i = 0$, bez překryvu s levou stranou, proto $x_2(t) = E$.
Odhad partikulárního řešení $x_p(t) = x_1(t) + x_2(t) = (At+B)\sin(t) + (Ct+D)\cos(t) + E$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme
$$[(B - 3A + 3D - 2C) + (A + 3C)t]\sin(t) + [(D - 3B - 3C + 2A) + (C - 3A)t]\cos(t) + 2E$$
$$= \sin(t) - t\cos(t) - 1,$$
tedy $B - 3A + 3D - 2C = 1$, $A + 3C = 0$, $D - 3B - 3C + 2A = 0$, $C - 3A = -1$, $2E = -1$, odtud $A = \frac{3}{10}$, $B = \frac{11}{25}$, $C = \frac{-1}{10}$, $D = \frac{21}{50}$, $E = -\frac{1}{2}$, obecné řešení je
$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \big(\frac{3}{10}t + \frac{11}{25}\big)\sin(t) + \big(\frac{21}{50} - \frac{1}{10}t\big)\cos(t) - \frac{1}{2} + a\,e^t + b\,e^{2t}$, $t \in I\!R$.

4. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, char. čísla $\lambda = 1, 2$; fund. syst. $\{e^t, e^{2t}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je
$x_h(t) = a\,e^t + b\,e^{2t}$, $t \in I\!R$.
Pravá strana je speciální, přesněji kombinace dvou speciálních pravých stran.
• $2e^t$: $d = 0$; $\lambda = 1 + 0i = 1$, překryv jednonásobný s levou stranou, proto
$x_1(t) = t[A\,e^t] = At\,e^t$.
• $2t^2 - 1$: $d = 2$; $\lambda = 0 + 0i = 0$, bez překryvu, proto $x_2(t) = Ct^2 + Dt + E$.
Odhad partikulárního řešení $x_p(t) = x_1(t) + x_2(t) = Ate^t + Ct^2 + Dt + E$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$-Ae^t + (2C - 3D + 2E) + (2D - 6C)t + 2Ct^2 = 2e^t + 2t^2 - 1,$$

odtud $A = -2$, $2C - 3D + 2E = -1$, $2D - 6C = 0$, $C = 1$, tedy $E = 3$, $D = 3$, obecné řešení je $x(t) = x_p(t) + x_h(t) = -2te^t + t^2 + 3t + 3 + a\,e^t + b\,e^{2t}$, $t \in I\!R$.

5. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$, char. čísla $\lambda = \pm 2i$; fund. syst. $\{\sin(2x), \cos(2x)\}$; obecné řešení homogenní rovnice je
$y_h(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$, $x \in I\!R$.
Pravá strana je speciální, přesněji kombinace dvou speciálních pravých stran.
• 1: $d = 0$; $\lambda = 0 + 0i = 0$, bez překryvu s levou stranou, proto $y_1(x) = A$.
• $2\sin(2x)$: $d = 0$; $\lambda = 0 + 2i = 2i$, jednonásobný překryv s levou stranou, proto
$y_2(x) = x[C\sin(2x) + D\cos(2x)]$.
Odhad partikulárního řešení $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = A + Cx\sin(2x) + Dx\cos(2x)$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$4A + (-4D)\sin(2x) + (4C)\cos(2x) = 1 + 2\sin(2x),$$ odtud $A = \frac{1}{4}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{2}$,
obecné řešení je $y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x\cos(2x) + a\sin(2x) + b\cos(2x)$, $x \in I\!R$.

6. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$, char. čísla $\lambda = 0, 2$; fund. syst. $\{1, e^{2x}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je $y_h(x) = a + b\,e^{2x}$, $x \in I\!R$.
Pravá strana je speciální, přesněji kombinace dvou speciálních pravých stran.
• $2x - 1$: $d = 1$; $\lambda = 0 + 0i = 0$, jednonásobný překryv s levou stranou, proto
$y_1(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$.
• $x\,e^x$: $d = 1$; $\lambda = 1 + 0i = 1$, bez překryvu s levou stranou, proto $y_2(x) = (Cx + D)e^x$.
Odhad partikulárního řešení $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = Ax^2 + Bx + (Cx + D)e^x$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$[(2A - 2B) - 4Ax] + [-Cx - D]e^x = 2x - 1 + x\,e^x,$$

odtud $2A - 2B = -1$, $A = -\frac{1}{2}$, $C = -1$, $D = 0$, tedy $B = 0$, obecné řešení je
$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x\,e^x + a + b\,e^{2x}$, $x \in I\!R$.

7. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$, char. čísla $\lambda = 0, 2$; fund. syst. $\{1, e^{2x}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je $y_h(x) = a + b\,e^{2x}$, $x \in I\!R$.
Pravá strana je speciální, přesněji kombinace dvou speciálních pravých stran.
• $5\sin(x) + 10\cos(x)$: $d = 0$; $\lambda = 0 + 1i = i$, bez překryvu s levou stranou, proto
$y_1(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$.
• $-8\cos(2x)$: $d = 0$; $\lambda = 0 + 2i = 2i$, bez překryvu s levou stranou, proto
$y_2(x) = C\sin(2x) + D\cos(2x)$.
Odhad partikulárního řešení $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = A\sin(x) + B\cos(x) + C\sin(2x) + D\cos(2x)$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$\begin{aligned}&[2B - A]\sin(x) + [-2A - B]\cos(x) + [4D - 4C]\sin(2x) + [-4C - 4D]\cos(2x)\\ &\qquad = 5\sin(x) + 10\cos(x) - 8\cos(2x),\end{aligned}$$

tedy $2B - A = 5$, $-2A - B = 10$, $4D - 4C = 0$, $-4C - 4D = -8$, odtud $A = -5$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 1$, obecné řešení je $y(x) = -5\sin(x) + \sin(2x) + \cos(2x) + a + b\,e^{2x}$, $x \in I\!R$.

8. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$, char. čísla $\lambda = 0, 2$; fund. syst. $\{1, e^{2x}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je $y_h(x) = a + b\,e^{2x}$, $x \in I\!R$.

Pravá strana je kombinace tří speciálních pravých stran.
• $2e^{2x}$: $d=0$; $\lambda=2$, překryv násobnosti $m=1$ s levou stranou, proto korekce, $y_1(x)=Ax\,e^{2x}$.
• $-5\cos(x)$: $d=0$; $\lambda=i$, bez překryvu s levou stranou, proto $y_2(x)=B\cos(x)+C\sin(x)$.
• 6: $d=0$; $\lambda=0$, překryv násobnosti $m=1$ s levou stranou, proto korekce, $y_3(x)=Dx$.
Odhad partikulárního řešení $y_p(x)=y_1(x)+y_2(x)+y_3(x)=Ax\,e^{2x}+B\cos(x)+C\sin(x)+Dx$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$2A\,e^{2x}+[-B-2C]\cos(x)+[2B-C]\sin(x)-2D=2e^{2x}-5\cos(x)+6,$$

tedy $2A=2$, $-B-2C=-5$, $2B-C=0$, $-2D=6$, odtud $A=1$, $B=1$, $C=2$, $D=-3$, obecné řešení je
$y(x)=y_p(x)+y_h(x)=x\,e^{2x}+\cos(x)+2\sin(x)-3x+a+b\,e^{2x}$, $x\in I\!R$.
Poč. podmínky: $y(x)=x\,e^{2x}+\cos(x)+2\sin(x)-3x+e^{2x}$, $x\in I\!R$.

9. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda)=\lambda^2-7\lambda+12$, char. čísla $\lambda=3,4$; fund. syst. $\{e^{3x},e^{4x}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je $y_h(x)=a\,e^{3x}+b\,e^{4x}$, $x\in I\!R$.
Pravá strana je kombinace dvou speciálních pravých stran.
• e^{4x}: $d=0$; $\lambda=4$, překryv násobnosti $m=1$ s levou stranou, proto korekce, $y_1(x)=Ax\,e^{4x}$.
• $12x-19$: $d=1$; $\lambda=0$, bez překryvu s levou stranou, proto $y_2(x)=Bx+C$.
Odhad partikulárního řešení $y_p(x)=y_1(x)+y_2(x)=Ax\,e^{4x}+Bx+C$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$A\,e^{4x}+12Bx+[-7B+12C]=e^{4x}+12x-19,$$

tedy $A=1$, $12B=12$, $-7B+12C=-19$, odtud $B=1$, $C=-1$, obecné řešení je
$y(x)=y_p(x)+y_h(x)=x\,e^{4x}+x-1+a\,e^{3x}+b\,e^{4x}$, $x\in I\!R$.
Poč. podmínky: $y(x)=x\,e^{4x}+x-1+e^{3x}$, $x\in I\!R$.

10. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2$, char. čísla $\lambda=2$ $(2\times)$; fund. syst. $\{e^{3x},x\,e^{3x}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je $y_h(x)=a\,e^{3x}+bx\,e^{3x}$, $x\in I\!R$.
Pravá strana je kombinace dvou speciálních pravých stran.
• $4e^x$: $d=0$; $\lambda=1$, bez překryvu s levou stranou, proto $y_1(x)=A\,e^x$.
• $9x+12$: $d=1$; $\lambda=0$, bez překryvu s levou stranou, proto $y_2(x)=Bx+C$.
Odhad partikulárního řešení $y_p(x)=y_1(x)+y_2(x)=A\,e^x+Bx+C$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$4A\,e^x+9Bx+[-6B+9C]=4e^x+9x+12,$$

tedy $4A=4$, $9B=9$, $-6B+9C=12$, odtud $A=1$, $B=1$, $C=2$, obecné řešení je
$y(x)=y_p(x)+y_h(x)=e^x+x+2+a\,e^{3x}+bx\,e^{3x}$, $x\in I\!R$.
Poč. podmínky: $y(x)=x+2+e^x-e^{3x}$, $x\in I\!R$.

11. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+5$, char. čísla $\lambda=2\pm i$; fund. syst. $\{e^{2x}\cos(x),e^{2x}\sin(x)\}$; obecné řešení homogenní rovnice je $y_h(x)=a\,e^{2x}\cos(x)+b\,e^{2x}\sin(x)$, $x\in I\!R$.
Pravá strana je kombinace dvou speciálních pravých stran.
• $\sin(x)$: $d=0$; $\lambda=i$, bez překryvu s levou stranou, proto $y_1(x)=A\cos(x)+B\sin(x)$.
• $25x$: $d=1$; $\lambda=0$, bez překryvu s levou stranou, proto $y_1(x)=Cx+D$.
Odhad partikulárního řešení $y_p(x)=y_1(x)+y_2(x)=A\cos(x)+B\sin(x)+Cx+D$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$[4A+4B]\cos(x)+[-4A+4B]\cos(x)+5Cx+[-4C+5D]=8\sin(x)+25x+0,$$

tedy $4A+4B=8$, $-4A+4B=0$, $5C=25$, $-4C+5D=0$, odtud $A=1$, $B=1$, $C=5$, $D=4$, obecné řešení je
$y(x)=\cos(x)+\sin(x)+5x+4+a\,e^{2x}\cos(x)+b\,e^{2x}\sin(x)$, $x\in I\!R$.
Poč. podmínky: $y(x)=\cos(x)+\sin(x)+5x+4$, $x\in I\!R$.

12. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+2)$, jeden kořen tipneme, třeba $\lambda = -1$, pak dělením $p(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2-4)$. Char. čísla $\lambda = -1, 2, -2$; fund. syst. $\{e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je $y_h(x) = a\,e^{-x} + b\,e^{2x} + c\,e^{-2x}$, $x \in I\!R$.
Pravá strana je kombinace dvou speciálních pravých stran.
• $6e^x$: $d = 0$; $\lambda = 1$, bez překryvu s levou stranou, proto $y_1(x) = A\,e^x$.
• $-4x$: $d = 1$; $\lambda = 0$, bez překryvu s levou stranou, proto $y_2(x) = Bx + C$.
Odhad partikulárního řešení $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = A\,e^x + Bx + C$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$-6A\,e^x - 4Bx + [-4B - 4C] = 6e^x - 4x + 0,$$

tedy $-6A = 6$, $-4B = -4$, $-4B - 4C = 0$, odtud $A = -1$, $B = 1$, $C = -1$, obecné řešení je $y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -e^x + x - 1 + a\,e^{-x} + b\,e^{2x} + c\,e^{-2x}$, $x \in I\!R$.
Poč. podmínky: $y(x) = y_p(x) + y_h(x) = x - 1 - e^x - e^{-x}$, $x \in I\!R$.

13. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$, char. čísla $\lambda = 0, 2$; fund. syst. $\{1, e^{2t}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je $x_h(t) = a + b\,e^{2t}$, $t \in I\!R$.
Zadaná pravá strana není speciální, ale takto $2\sinh(2t) = e^{2t} - e^{-2t}$ je, přesněji je to kombinace dvou speciálních pravých stran.
• e^{2t}: $d = 0$; $\lambda = 2$, jednonásobný překryv s levou stranou, proto $x_1(t) = t^1[A\,e^{2t}] = At\,e^{2t}$.
• e^{-2t}: $d = 0$; $\lambda = -2$, bez překryvu s levou stranou, proto $x_2(t) = B\,e^{-2t}$.
Odhad partikulárního řešení $x_p(t) = x_1(t) + x_2(t) = At\,e^{2t} + B\,e^{-2t}$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$2A\,e^{2t} + 8B\,e^{-2t} = e^{2t} - e^{-2t}, \text{ odtud } A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{8},$$

obecné řešení je $x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \frac{1}{2}t\,e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-2t} + a + b\,e^{2t}$, $t \in I\!R$.
Poč. podmínky: $x(t) = \frac{1}{2}t\,e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-2t} - \frac{1}{2}$, $t \in I\!R$.

14. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 4$, char. čísla $\lambda = \pm 2$; fund. syst. $\{e^{-2x}, e^{2x}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je
$y_h(x) = a\,e^{2x} + b\,e^{-2x}$, $x \in I\!R$.
Pravá strana je kombinace dvou speciálních pravých stran.
• $13\sin(3x)$: $d = 0$; $\lambda = 3i$, bez překryvu s levou stranou, proto
$y_1(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x)$.
• $-5\cos(x)$: $d = 0$; $\lambda = i$, bez překryvu s levou stranou, proto $y_2(x) = C\sin(x) + D\cos(x)$.
Odhad partikulárního řešení
$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x) + C\sin(x) + D\cos(x)$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$(-13A)\sin(3x) + (-13B)\cos(3x) + (-5C)\sin(x) + (-5D)\cos(x) = 13\sin(3x) - 5\cos(x),$$

odtud $A = -1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 0$, obecné řešení je
$y(x) = \cos(x) - \sin(3x) + a\,e^{2x} + b\,e^{-2x}$, $x \in I\!R$.
Poč. podmínky: $y(x) = \cos(x) - \sin(3x) + 2e^{2x}$, $x \in I\!R$.

15. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$, char. čísla $\lambda = \pm 2i$; fund. syst. $\{\sin(2t), \cos(2t)\}$; obecné řešení homogenní rovnice je
$y_h(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t)$, $t \in I\!R$.
Pravá strana je kombinace dvou speciálních pravých stran.
• $9t\sin(t)$: $d = 1$; $\lambda = i$, bez překryvu s levou stranou, proto
$y_1(t) = (At + B)\sin(t) + (Ct + D)\cos(t)$.
• $-5e^t$: $d = 0$; $\lambda = 1$, bez překryvu s levou stranou, proto $y_2(t) = E\,e^t$.
Odhad partikulárního řešení $y_p(t) = y_1(t) + y_2(t) = (At + B)\sin(t) + (Ct + D)\cos(t) + E\,e^t$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$[3B - 2C + 3At]\sin(t) + [3D + 2A + 3Ct]\cos(t) + 5Et^t = 9t\sin(t) - 5e^t,$$

tedy $3B - 2C = 0$, $3A = 9$, $3D + 2A = 0$, $3C = 0$, $5E = -5$, odtud $A = 3$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2$, $E = -1$, obecné řešení je

$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = 3t\sin(t) - 2\cos(t) - e^t + a\sin(2t) + b\cos(2t)$, $t \in I\!R$.
Poč. podmínky: $y(t) = 3t\sin(t) - 2\cos(t) - e^t + \sin(2t)$, $t \in I\!R$.

16. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, char. čísla $\lambda = 1, 2$; fund. syst. $\{e^x, e^{2x}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je
$y_h(x) = a\,e^x + b\,e^{2x}$, $x \in I\!R$.
Pravá strana je speciální, přesněji kombinace dvou speciálních pravých stran.
• $2x$: $d = 1$; $\lambda = 0$, bez překryvu s levou stranou, proto $y_1(x) = Ax + B$.
• $(\pi^4 + 5\pi^2 + 4)\sin(\pi x)$: $d = 0$; $\lambda = \pi i$, bez překryvu s levou stranou, proto
$y_2(x) = C\sin(\pi x) + D\cos(\pi x)$.
Odhad partikulárního řešení $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = Ax + B + C\sin(\pi x) + D\cos(\pi x)$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme
$[(2B - 3A) + 2Ax] + [2C - \pi^2 C + 3\pi D]\sin(x) + [2D - \pi^2 D - 3\pi C]\cos(x)$
$= 2x + (\pi^4 + 5\pi^2 + 4)\sin(\pi x)$,
tedy $2B - 3A = 0$, $2A = 2$, $(2 - \pi^2)C + 3\pi D = (\pi^4 + 5\pi^2 + 4)$, $(2 - \pi^2)D - 3\pi C = 0$, odtud $A = 1$, $B = \frac{3}{2}$, $C = 2 - \pi^2$, $D = 3\pi$, obecné řešení je
$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{3}{2} + x + (2 - \pi^2)\sin(\pi x) + 3\pi\cos(\pi x) + a\,e^x + b\,e^{2x}$, $x \in I\!R$.
Poč. podmínky: $y(x) = \frac{3}{2} + x + (2 - \pi^2)\sin(\pi x) + 3\pi\cos(\pi x) + e^x$, $x \in I\!R$.

17. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, char. čísla $\lambda = \pm i$; fund. syst. $\{\sin(t), \cos(t)\}$; obecné řešení homogenní rovnice je
$x_h(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$, $t \in I\!R$.
Pravá strana je kombinace dvou speciálních pravých stran.
• $\sin(t)$: $d = 0$; $\lambda = i$, překryv násobnosti $m = 1$ s levou stranou, proto
$x_1(t) = t[A\sin(t) + B\cos(t)]$.
• $e^t\sin(t)$: $d = 0$; $\lambda = 1 + i$, bez překryvu s levou stranou, proto
$x_2(t) = e^t[C\sin(t) + D\cos(t)]$.
Odhad partikulárního řešení
$x_p(t) = x_1(t) + x_2(t) = At\sin(t) + Bt\cos(t) + C\,e^t\sin(t) + D\,e^t\cos(t)$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$(-2B)\sin(t) + (2A)\cos(t) + (C - 2D)e^t\sin(t) + (2C + D)e^t\cos(t) = \sin(t) + e^t\sin(t)$,
odtud $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$, $C - 2D = 1$, $2C + D = 0$, tedy $C = \frac{1}{5}$, $D = -\frac{2}{5}$, obecné řešení je
$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \frac{e^t}{5}\sin(t) - \frac{2e^t}{5}\cos(t) - \frac{t}{2}\cos(t) + a\sin(t) + b\cos(t)$, $t \in I\!R$.
Poč. podmínky: $x(t) = \frac{e^t}{5}\sin(t) - \frac{2e^t}{5}\cos(t) - \frac{t}{2}\cos(t) + 2\sin(t)$, $t \in I\!R$.