ODR: Cvičné příklady—metoda variace

1. Pro rovnici $y' = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3y}{x}$ najděte řešení Cauchyho úloh

a) $y(-1) = 3$; b) $y(1) = 1$; c) $y(0) = 3$.

Vyřešte následující Cauchyho úlohy:

2. $y' = 2y + \dfrac{1}{\sqrt{x}} e^{2x}$, $y(1) = e^2$;

3. $y' = \dfrac{2}{x} y + x^2 \sin(x)$, $y(\pi) = 2\pi^2$;

4. $y' + y = 13x$, $y(0) = 10$;

5. $x' = \dfrac{x}{t+1} + 1$, $x(0) = -2$;

6. $y' = 3x^2 y - e^{x^3}$, $y(0) = 13$;

7. $y' + \dfrac{2xy}{x^2-4} = \dfrac{2x}{(x^2-4)^2}$, $y(1) = -\frac{\ln(3)}{3}$;

8. $x' = 2t^3 - 2tx$, $x(0) = 2$;

9. $y' + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{y}{x-1}$, $y(2) = \ln(3)$;

10. $y' + y + x = 0$, $y(0) = 0$;

11. $y' + \dfrac{y}{x-1} = 6x$, $y(0) = -4$;

12. $xy' + y = \dfrac{1}{x}$, $y(-1) = 0$;

13. $\dot{x} = x \operatorname{cotg}(t) + 2t \sin^2(t)$, $x\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 1$.

14. Najděte obecné řešení rovnice $y' = \dfrac{x(y-1)}{x^2+1} + \sqrt{x^2+1}$.

15. Vyřešte Cauchyho úlohu $y' = \dfrac{y(x+1)}{x} - \dfrac{x+1}{x}$, $y(-1) = 1 - \frac{3}{e}$.

16. Uvažujte rovnici $y'' - \dfrac{2x}{1+x^2} y' + \dfrac{2}{1+x^2} y = 1 + x^2$.

a) Dokažte, že $\{x, x^2-1\}$ je její fundamentální system.
b) Najděte obecné řešení přidružené homogenní rovnice.
c) Najděte obecné řešení dané rovnice.

Vyřešte následující Cauchyho úlohy:

17. $\ddot{x} + x = \dfrac{1}{\cos^3(t)}$, $x(\pi) = \dot{x}(\pi) = \frac{1}{2}$;

18. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{-e^{-2x}}{x^2-1}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Najděte obecné řešení následujících rovnic:

19. $x'' + 9x = \dfrac{9}{\sin(3t)}$;

20. $y'' + 2y' + y = 15e^{-x}\sqrt{x}$;

21. $\ddot{x} + 4x = 8\sin^2(2t)$;

22. $\ddot{x} + 4x = -8\operatorname{cotg}(2t)$.

Řešení

1. Podmínky: $x \neq 0$. Metoda: nejde separovat, je to ale nehomogenní lineární, tedy variace konstanty.
Nejprve homogenní, $y' = -\frac{3y}{x}$, tedy $\int \frac{dy}{y} = -3\int \frac{dx}{x}$, $\ln|y| = -3\ln|x| + c = \ln\bigl(\frac{1}{|x^3|}\bigr) + c$, $y = \pm e^c \frac{1}{x^3}$, obecné řešení homogenní je $y_h(x) = \frac{C}{x^3}$, $x \neq 0$.
Variace: $y(x) = \frac{C(x)}{x^3}$, pak $\frac{C'(x)}{x^3} = \frac{2}{x^3}$, $C'(x) = 2$. Odtud $C(x) = 2x$ nebo $C(x) = 2x + C$, obecné řešení je $y(x) = \frac{2x+C}{x^3}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$.
Poznámka: Metoda odhadu nepomůže, rovnice nemá konstantní koeficienty a navíc $\frac{2}{x^3}$ neumíme odhadnout.
Počáteční podmínky: a) $C = -1$, tedy $y_a(x) = \frac{2x-1}{x^3}$, $x \in (-\infty, 0)$;
b) $C = -1$, tedy $y_b(x) = \frac{2x-1}{x^3}$, $x \in (0, \infty)$; c) $y_c(x)$ neex.

2. Podmínky: $x > 0$. Metoda: nejde separovat, je to ale nehomogenní lineární, tedy variace konstanty.
Nejprve homogenní, $y' = 2y$, převod $y' - 2y = 0$, konstantní koeficienty, proto lze použít $\lambda - 2 = 0$, pak $\lambda = 2$, obecné řešení homogenní je $y_h(x) = Ce^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Šla by i separace: $\int \frac{dy}{y} = \int 2dx$, $\ln|y| = 2x + c$, $y = \pm e^c e^{2x}$, $y_h(x) = Ce^{2x}$.
Variace: $y(x) = C(x)e^{2x}$, pak $C'(x)e^{2x} = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{2x}$, $C'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Odtud $C(x) = 2\sqrt{x}$ nebo $C(x) = 2\sqrt{x} + C$, obecné řešení je $y(x) = 2\sqrt{x}e^{2x} + Ce^{2x}$, $x \in (0, \infty, 0)$.
Poznámka: Metoda odhadu nepomůže, rovnice sice má konstantní koeficienty, ale $\frac{1}{\sqrt{x}}e^{2x}$ neumíme odhadnout.
Počáteční podmínka: $C = -1$, tedy $y(x) = 2\sqrt{x}e^{2x} - e^{2x}$, $x \in (0, \infty, 0)$.

3. Podmínky: $x \neq 0$. Metoda: nejde separovat, je to ale nehomogenní lineární, tedy variace konstanty.
Nejprve homogenní, $y' = \frac{2}{x}y$, tedy $\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$, $\ln|y| = 2\ln|x| + c = \ln(|x^2|) + c$, $y = \pm e^c x^2$, obecné řešení homogenní je $y_h(x) = Cx^2$, $x \neq 0$.
Variace: $y(x) = C(x)x^2$, pak $C'(x)x^2 = x^2\sin(x)$, $C'(x) = \sin(x)$. Odtud $C(x) = -\cos(x)$ nebo $C(x) = C - \cos(x)$, obecné řešení je $y(x) = Cx^2 - x^2\cos(x)$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$.
Poznámka: Metoda odhadu nepomůže, rovnice nemá konstantní koeficienty.
Počáteční podmínka: $C = 1$, tedy $y(x) = x^2(1 - \cos(x))$, $x \in (0, \infty)$.

4. Podmínky: nejsou. Metoda: nejde separovat, je to ale nehomogenní lineární, tedy variace konstanty.
Nejprve homogenní, $y' + y = 0$, konstantní koeficienty, proto lze použít $\lambda + 1 = 0$, pak $\lambda = -1$, obecné řešení homogenní je $y_h(x) = Ce^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Šla by i separace: $\int \frac{dy}{y} = -\int 1dx$, $\ln|y| = -x + c$, $y = \pm e^c e^{-x}$, $y_h(x) = Ce^{-x}$.
Variace: $y(x) = C(x)e^{-x}$, pak $C'(x)e^{-x} = 13x$, $C'(x) = 13x\,e^x$. Odtud $C(x) = 13x\,e^x - 13e^x$ nebo $C(x) = 13x\,e^x - 13e^x + C$, obecné řešení je $y(x) = 13x - 13 + Ce^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Poznámka: Tuto rovnici by šlo řešit i metodou odhadu. Odhad $y_p = Ax + B$ vede na $A = 13$, $B = -13$.
Počáteční podmínka: $C = 23$, tedy $y(x) = 13x - 13 + 23e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Podmínky: $t \neq -1$. Metoda: nejde separovat, je to ale nehomogenní lineární, tedy variace konstanty.
Nejprve homogenní, $x' = \frac{x}{t+1}$, tedy $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{t+1}$, $\ln|x| = \ln|t+1| + c$, $x = \pm e^c(t+1)$, obecné řešení homogenní je $x_h(t) = C(t+1)$, $t \neq -1$.
Variace: $x(t) = C(t)(t+1)$, pak $C'(t)(t+1) = 1$, $C'(t) = \frac{1}{t+1}$. Odtud $C(t) = \ln|t+1|$ nebo $C(t) = \ln|t+1| + C$, obecné řešení je $x(t) = C(t+1) + \ln|t+1|(t+1)$, $t \in (-\infty, -1)$ nebo $t \in (-1, \infty)$.
Poznámka: Metoda odhadu nepomůže, rovnice nemá konstantní koeficienty.
Počáteční podmínka: $C = -2$, tedy $x(t) = \ln|t+1|(t+1) - 2(t+1)$, $t \in (-1, \infty)$.

6. Podmínky: nejsou. Metoda: nejde separovat, je to ale nehomogenní lineární, tedy variace konstanty.
Nejprve homogenní, $y' = 3x^2y$, tedy $\int \frac{dy}{y} = 3\int x^2\,dx$, $\ln|y| = x^3 + c$, $y = \pm e^c e^{x^3}$, obecné řešení homogenní je $y_h(x) = Ce^{x^3}$, $x \in I\!R$.
Variace: $y(x) = C(x)e^{x^3}$, pak $C'(x)e^{x^3} = -e^{x^3}$, $C'(x) = -1$. Odtud $C(x) = -x$ nebo $C(x) = C - x$, obecné řešení je $y(x) = Ce^{x^3} - x\,e^{x^3}$, $x \in I\!R$.
Poznámka: Metoda odhadu nepomůže, rovnice nemá konstantní koeficienty a navíc e^{x^3} neumíme odhadnout.
Počáteční podmínka: $C = 13$, tedy $y(x) = (13 - x)e^{x^3}$, $x \in I\!R$.

7. Podmínky: $x \neq \pm 2$. Metoda: nejde separovat, je to ale nehomogenní lineární, tedy variace konstanty.
Nejprve homogenní, $y' + \frac{2xy}{x^2-4} = 0$, tedy $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{2x}{x^2-4}\,dx$, $\ln|y| = -\ln|x^2-4| + c = \ln|(x^2-4)^{-1}| + c$, $y = \pm e^c\frac{1}{x^2-4}$, obecné řešení homogenní je $y_h(x) = C\frac{1}{x^2-4}$, $x \neq \pm 2$.
Variace: $y(x) = C(x)\frac{1}{x^2-4}$, pak $C'(x)\frac{1}{x^2-4} = \frac{2x}{(x^2-4)^2}$, $C'(x) = \frac{2x}{x^2-4}$. Odtud $C(x) = \ln|x^2-4|$ nebo $C(x) = \ln|x^2-4| + C$, obecné řešení je $y(x) = \frac{C}{x^2-4} + \frac{\ln|x^2-4|}{x^2-4}$, $x \neq \pm 2$.
Poznámka: Metoda odhadu nepomůže, rovnice nemá konstantní koeficienty a navíc $\frac{2x}{(x^2-4)^2}$ neumíme odhadnout.
Počáteční podmínka: $C = 0$, tedy $y(x) = \frac{\ln|x^2-4|}{x^2-4} = \frac{\ln(4-x^2)}{x^2-4}$, $x \in (-2, 2)$.

8. Podmínky: nejsou. Metoda: nejde separovat, je to ale nehomogenní lineární, tedy variace konstanty.
Nejprve homogenní, $x' = -2tx$, tedy $\int \frac{dx}{x} = -\int 2t\,dt$, $\ln|x| = -t^2 + c$, $x = \pm e^c e^{-t^2}$, obecné řešení homogenní je $x_h(t) = Ce^{-t^2}$, $t \in I\!R$.
Variace: $y(x) = C(t)e^{-t^2}$, pak $C'(t)e^{-t^2} = 2t^3$, $C'(t) = 2t^3e^{t^2}$. Odtud $C(x) = t^2e^{t^2} - e^{t^2}$ nebo $C(x) = t^2e^{t^2} - e^{t^2} + C$, obecné řešení je $y(x) = t^2 - 1 + Ce^{-t^2}$, $t \in I\!R$.
Poznámka: Metoda odhadu nepomůže, rovnice nemá konstantní koeficienty.
Počáteční podmínka: $C = 3$, tedy $x(t) = t^2 - 1 + 3e^{-t^2}$, $t \in I\!R$.

9. Podmínky: $x \neq \pm 1$. Metoda: nejde separovat, je to ale nehomogenní lineární, tedy variace konstanty.
Nejprve homogenní, $y' = \frac{y}{x-1}$, tedy $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x-1}$, $\ln|y| = \ln|x-1| + c$, $y = \pm e^c(x-1)$, obecné řešení homogenní je $y_h(x) = C(x-1)$, $x \neq 1$.
Variace: $y(x) = C(x)(x-1)$, pak $C'(x)(x-1) = -\frac{2}{x+1}$, $C'(x) = -\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$. Odtud $C(x) = \ln|x+1| - \ln|x-1| = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ nebo $C(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$, obecné řešení je $y(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|(x-1) + C(x-1)$, $x \neq \pm 1$.
Poznámka: Metoda odhadu nepomůže, rovnice nemá konstantní koeficienty a navíc $\frac{2}{x+1}$ neumíme odhadnout.
Počáteční podmínka: $C = 0$, tedy $y(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|(x-1)$, $x \in (1, \infty)$.

10. Podmínky: nejsou. Metoda: nejde separovat, je to ale nehomogenní lineární, tedy variace konstanty. Pozor, tvar je $y' + y = -x$, tedy $b(x) = -x$.
Nejprve homogenní, $y' = -y$, tedy $\int \frac{dy}{y} = -\int dx$, $\ln|y| = -x + c$, $y = \pm e^c e^{-x}$, obecné řešení homogenní je $y_h(x) = Ce^{-x}$, $x \in I\!R$.
Variace: $y(x) = C(x)e^{-x}$, pak $C'(x)e^{-x} = b(x) = -x$, $C'(x) = -x\,e^x$. Odtud integrací per partes $C(x) = -x\,e^x + e^x$ nebo $C(x) = -x\,e^x + e^x + C$, obecné řešení je
$y(x) = (e^x - x\,e^x + C)e^{-x} = 1 - x + Ce^{-x}$, $x \in I\!R$.
Poznámka: Tuto rovnici by šlo řešit i metodou odhadu. Odhad $y_p = Ax + B$ vede na $A = -1$, $B = 1$.
Počáteční podmínka: $C = -1$, tedy $y(x) = 1 - x - e^{-x}$, $x \in I\!R$.

11. Podmínky: $x \neq 1$. Metoda: nejde separovat, je to ale nehomogenní lineární, tedy variace konstanty.
Nejprve homogenní, $y' = -\frac{y}{x-1}$, tedy $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x-1}$, $\ln|y| = -\ln|x-1| + c$, $y = \pm e^c \frac{1}{x-1}$, obecné řešení homogenní je $y_h(x) = \frac{C}{x-1}$, $x \neq 1$.
Variace: $y(x) = \frac{C(x)}{x-1}$, pak $\frac{C'(x)}{x-1} = 6x$, $C'(x) = 6x^2 - 6x$. Odtud $C(x) = 2x^3 - 3x^2$ nebo $C(x) = 2x^3 - 3x^2 + C$, obecné řešení je $y(x) = \frac{2x^3-3x^2+C}{x-1}$, $x \neq 1$.
Poznámka: Metoda odhadu nepomůže, rovnice nemá konstantní koeficienty.
Počáteční podmínka: $C = 4$, tedy $y(x) = \frac{2x^3-3x^2+4}{x-1}$, $x \in (\infty, 1)$.

12. Podmínky: $x \neq 0$. Metoda: nejde separovat, ale lze ji upravit na nehomogenní lineární $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$, tedy variace konstanty.
Nejprve homogenní, $y' = -\frac{y}{x}$, tedy $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$, $\ln|y| = -\ln|x| + c = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) + c$, $y = \pm e^c \frac{1}{x}$, obecné řešení homogenní je $y_h(x) = \frac{C}{x}$, $x \neq 0$.
Variace: $y(x) = \frac{C(x)}{x}$, pak $\frac{C'(x)}{x} = \frac{1}{x^2}$, $C'(x) = \frac{1}{x}$. Odtud $C(x) = \ln|x|$ nebo $C(x) = \ln|x| + C$, obecné řešení je $y(x) = \frac{C}{x} + \frac{\ln|x|}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$.
Poznámka: Metoda odhadu nepomůže, rovnice nemá konstantní koeficienty a navíc $\frac{1}{x^2}$ neumíme odhadnout.
Počáteční podmínka: $C = 0$, tedy $y(x) = \frac{\ln|x|}{x} = \frac{\ln(-x)}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$.

13. Podmínky: $t \neq k\pi$. Metoda: nejde separovat, je to ale nehomogenní lineární, tedy variace konstanty.
Nejprve homogenní, $\dot{x} = x \operatorname{cotg}(t)$, tedy $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{\cos(t)dt}{\sin(t)}$, substituce $z = \sin(t)$, $\ln|x| = \ln|\sin(t)| + c$, $y = \pm e^c \sin(t)$, obecné řešení homogenní je $x_h(t) = C\sin(t)$, $t \neq k\pi$.
Variace: $x(t) = C(t)\sin(t)$, pak $C'(t)\sin(t) = 2t\sin^2(t)$, $C'(t) = 2t\sin(t)$. Odtud pomocí per-partes $C(x) = -2t\cos(t) + 2\sin(t)$ nebo $C(x) = -2t\cos(t) + 2\sin(t) + C$, obecné řešení je $x(t) = 2\sin^2(t) - 2t\sin(t)\cos(t) + C\sin(t) = 2\sin^2(t) - t\sin(2t) + C\sin(t)$, $t \in (k\pi, (k+1)\pi)$ pro $k \in \mathbb{Z}$.
Poznámka: Metoda odhadu nepomůže, rovnice nemá konstantní koeficienty a navíc $2t\sin^2(t)$ neumíme odhadnout.
Počáteční podmínka: $C = 1$, tedy $y(x) = 2\sin^2(t) - t\sin(2t) + \sin(t)$, $t \in (3\pi, 4\pi)$.

14. Podmínky: nejsou. Metoda: nejde separovat, není to ani formálně lineární, ale jde na ni upravit:

$$y' = \frac{x}{x^2+1}y - \frac{x}{x^2+1} + \sqrt{x^2+1}.$$

Homogenní rovnice $y' = \frac{x}{x^2+1}y$: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2+1}$, substituce $z = x^2+1$, $\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c = \ln\sqrt{x^2+1} + c$, $y = \pm e^c\sqrt{x^2+1}$, obecné řešení homogenní je $y_h(x) = C\sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.
Variace: $y(x) = C(x)\sqrt{x^2+1}$, pak $C(x)'\sqrt{x^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} + \sqrt{x^2+1}$, proto

$$C(x) = \int -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} + 1\,dx = -\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx + x = \left| \begin{array}{c} z = \sqrt{x^2+1} \\ dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \end{array} \right|$$

$$= x - \int \frac{dz}{z^2} = x + \frac{1}{z} + C = x + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C,$$

takže obecné řešení je $y(x) = x\sqrt{x^2+1} + 1 + C\sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.
Poznámka: Metoda odhadu nepomůže, rovnice nemá konstantní koeficienty a navíc pravou stranu neumíme odhadnout.

Alternativa: Metoda variace konstant funguje i na typ $y' + a(x)(Ay + B) = b(x)$, takže je možno také řešit rovnou: Všude spojité, takže řešení na $\mathbb{R}$. Z homogenní rovnice $y' = \frac{x}{x^2+1}(y-1)$ se separací dostane $y_h(x) = C\sqrt{x^2+1} + 1$, $x \in \mathbb{R}$ (zahrnuje i stacionární $y(x) = 1$). Variace: $y(x) = C(x)\sqrt{x^2+1} + 1$, potom $y'(x) = C'(x)\sqrt{x^2+1} + C(x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, dosazení do rovnice a pak zkrácení vede na rovnici $C'(x) = 1$, tedy $C(x) = x + C$. Obecné řešení $y(x) = (x+C)\sqrt{x^2+1} + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Pozor! Kvůli tomu $Ay + B$ se tentokráte opravdu musí zderivovat, dosadit do rovnice a pak zkrátit, nefunguje trik $C'(x)\sqrt{x^2+1} + 1 = \sqrt{x^2+1}$.

15. Podmínky: $x \neq 0$. Metoda: je to nehomogenní lineární, tedy variace konstanty.
Homogenní rovnice $y' = \frac{y(x+1)}{x}$: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x+1}{x}\,dx = \int 1 + \frac{1}{x}\,dx$, $\ln|y| = x + \ln|x| + c$, $y = \pm e^c x\,e^x$, obecné řešení homogenní je $y_h(x) = Cx\,e^x$, $x \neq 0$.
Variace: $y(x) = C(x)x\,e^x$, pak $C'(x)x\,e^x = \frac{x+1}{x}$, $C(x) = \int \frac{x+1}{x^2}e^{-x}dx$. Tohle neumíme integrovat.
Jiná metoda? Dát původní dohromady, separovat: $y' = (y-1)\frac{(x+1)}{x}$, podmínka $x \neq 0$. Rozdělíme, integrujeme:

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{x+1}{x}\,dx = \int 1 + \frac{1}{x}\,dx,$$

tedy $\ln|y-1| = x + \ln|x| + c$, $y - 1 = \pm e^c x\,e^x$, proto obecné řešení $y(x) = Cx\,e^x + 1$, $x \neq 0$; volba $C = 0$ dá stacionární řešení.
Počáteční podmínka: $C = 3$, tedy $y(x) = 3x\,e^x + 1$, $x \in (-\infty, 0)$.

16. a) Dosazením do přidružené homogenní rovnice ověříme, že obě funkce jsou její řešení na $I\!R$. Pro libovolné $x \in I\!R$ totiž platí:
$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = [x]'' - \frac{2x}{1+x^2}[x]' + \frac{2}{1+x^2}x = 0 - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = 0.$
$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = [x^2-1]'' - \frac{2x}{1+x^2}[x^2-1]' + \frac{2}{1+x^2}[x^2-1] = 2 - \frac{4x^2}{1+x^2} + \frac{2x^2-2}{1+x^2} = 0.$
Máme tedy dvě řešení a prostor řešení homogenní ODR řádu 2 má dimenzi 2. Stačí tedy ukázat, že tyto funkce jsou lineárně nezávislé, aby tvořily bázi. K tomu použijeme Wronskián.

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ [x]' & [x^2-1]' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - (x^2-1) = x^2 + 1 \neq 0.$$

Protože $\{x, x^2-1\}$ je báze prostoru řešení přidružené homogenní rovnice, je to i fundamentální systém dané rovnice.
b) $y_h(x) = ax + b(x^2-1)$, $x \in I\!R$.
c) Rovnice je lineární, pravá strana je dokonce speciální, ale rovnice nemá konstantní koeficienty, proto nelze použít metodu odhadu. Zbývá jen metoda variace konstant, uvažujeme $y(x) = a(x)x + b(x)(x^2-1)$ a sestavíme rovnice:

$$\begin{aligned} a'(x)x + b'(x)(x^2-1) &= 0 \\ a'(x)[x]' + b'(x)[x^2-1]' &= 1 + x^2 \end{aligned} \implies \begin{aligned} a'(x)x + b'(x)(x^2-1) &= 0 \\ a'(x) + b'(x)2x &= 1 + x^2 \end{aligned}$$

Např. Kramerovým pravidlem $D = x^2 + 1$, $D_{a'} = -(x^2-1)(1+x^2)$, $D_{b'} = x(1+x^2)$, proto

$$\begin{aligned} a'(x) &= 1 - x^2 \\ b'(x) &= x \end{aligned} \implies \begin{aligned} a(x) &= x - \tfrac{1}{3}x^3 \\ b(x) &= \tfrac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Dostali jsme partikulární řešení dané rovnice $y_p(x) = \big(x - \frac{1}{3}x^3\big)x + \frac{1}{2}x^2(x^2-1) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4$, obecné řešení se dostane vzorcem $y_p + y_h$, proto je obecné řešení dané rovnice rovno
$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + ax + b(x^2-1)$, $x \in I\!R$.
Poznámka: Obecné řešení se dalo i najít přímo výpoctem $a(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + a$, $b(x) = \frac{1}{2}x^2 + b$.

17. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, char. čísla $\lambda = \pm j$; fund. syst. $\{\sin(t), \cos(t)\}$; obecné řešení homogenní rovnice je $x_h(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$, $t \in I\!R$.
Pravá strana není speciální, proto variace konstanty: $x(t) = a(t)\sin(t) + b(t)\cos(t)$, rovnice

$$\begin{aligned} a'(t)\sin(t) + b'(t)\cos(t) &= 0 \\ a'(t)\cos(t) - b'(t)\sin(t) &= \tfrac{1}{\cos^3(t)} \end{aligned} \implies \begin{aligned} a'(t) &= \tfrac{1}{\cos^2(t)} \\ b'(t) &= \tfrac{-\sin(t)}{\cos^3(t)} \end{aligned} \implies \begin{aligned} a(t) &= \operatorname{tg}(t) \\ b(t) &= -\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{\cos^2(t)} \end{aligned}$$

($b(t)$ se dělá substitucí $z = \cos(t)$).
Proto $x_p(t) = \operatorname{tg}(t)\sin(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2(t)}\cos(t)$ a $x = x_p + x_h$. Obecné řešení je
$x(t) = \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} - \frac{1}{2}\frac{1}{\cos(t)} + a\sin(t) + b\cos(t)$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
Poč. podmínky: $x(t) = \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} - \frac{1}{2}\frac{1}{\cos(t)} - \sin(t)$, $t \in \big(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big)$.

18. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda)=\lambda^2+4\lambda+4$, char. číslo $\lambda=-2$ $(2\times)$; fund. syst. $\{e^{-2x}, x\,e^{-2x}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je
$y_h(x)=ae^{-2x}+bx\,e^{-2x}$, $x\in I\!R$.
Pravá strana není speciální, proto variace konstanty: $y(x)=a(x)e^{-2x}+b(x)x\,e^{-2x}$, rovnice

$$\begin{aligned} a'(x)e^{-2x}+b'(x)x\,e^{-2x}&=0\\ -2a'(x)e^{-2x}+b'(x)(1-2x)e^{-2x}&=\tfrac{e^{-2x}}{x^2-1}\end{aligned} \implies \begin{aligned} a'(x)&=\tfrac{x}{x^2-1}\\ b'(x)&=\tfrac{-1}{x^2-1}\end{aligned} \implies \begin{aligned} a(x)&=\tfrac12\ln|x^2-1|\\ b(x)&=-\tfrac12\ln|\tfrac{x-1}{x+1}|\end{aligned}$$

($a(x)$ se dělá substitucí $z=x^2-1$, $b(x)$ pomocí parciálních zlomků).
Proto $y_p(x)=\frac12\ln|x^2-1|\,e^{-2x}-\frac12\ln\big|\frac{x-1}{x+1}\big|x\,e^{-2x}$ a $y=y_p+y_h$. Obecné řešení je
$y(x)=\frac12\ln|x^2-1|e^{-2x}-\frac12\ln\big|\frac{x-1}{x+1}\big|x\,e^{-2x}+ae^{-2x}+bx\,e^{-2x}$, $x\neq\pm1$.
Poč. podmínky: $y(x)=\frac12\ln|x^2-1|e^{-2x}-\frac12\ln\big|\frac{x-1}{x+1}\big|x\,e^{-2x}+e^{-2x}$, $x\in(-1,1)$.

19. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda)=\lambda^2+9$, char. čísla $\lambda=\pm3j$; fund. syst. $\{\sin(3t),\cos(3t)\}$; obecné řešení homogenní rovnice je
$x_h(t)=a\sin(3t)+b\cos(3t)$, $t\in I\!R$.
Pravá strana není speciální, proto variace konstanty: $x(t)=a(t)\sin(3t)+b(t)\cos(3t)$, rovnice

$$\begin{aligned} a'(t)\sin(3t)+b'(t)\cos(3t)&=0\\ 3a'(t)\cos(3t)-3b'(t)\sin(3t)&=\tfrac{9}{\sin(3t)}\end{aligned} \implies \begin{aligned} a'(t)&=\tfrac{3\cos(3t)}{\sin(3t)}\\ b'(t)&=-3\end{aligned} \implies \begin{aligned} a(t)&=\ln|\sin(3t)|\\ b(t)&=-3t\end{aligned}$$

($a(t)$ se dělá substitucí $z=\sin(3t)$).
Proto $x_p(t)=\ln|\sin(3t)|\sin(3t)-3t\cos(3t)$ a $x=x_p+x_h$. Obecné řešení je
$x(t)=\ln|\sin(3t)|\sin(3t)-3t\cos(3t)+a\sin(3t)+b\cos(3t)$, $t\neq k\pi$.

20. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1$, char. číslo $\lambda=-1$ $(2\times)$; fund. syst. $\{e^{-x}, x\,e^{-x}\}$; obecné řešení homogenní rovnice je
$y_h(x)=ae^{-x}+bx\,e^{-x}$, $x\in I\!R$.
Pravá strana není speciální, proto variace konstanty: $y(x)=a(x)e^{-x}+b(x)x\,e^{-x}$, rovnice

$$\begin{aligned} a'(x)e^{-x}+b'(x)x\,e^{-x}&=0\\ -a'(x)e^{-x}+b'(x)(1-x)e^{-x}&=15e^{-x}\sqrt{x}\end{aligned} \implies \begin{aligned} a'(x)&=-x\sqrt{x}=-15x^{3/2}\\ b'(x)&=15\sqrt{x}\end{aligned} \implies \begin{aligned} a(x)&=-6x^{5/2}\\ b(x)&=10x^{3/2}\end{aligned}$$

Proto $y_p(x)=-6\sqrt{x^5}\,e^{-x}+10\sqrt{x^3}x\,e^{-x}$ a $y=y_p+y_h$. Obecné řešení je
$y(x)=4\sqrt{x^5}e^{-x}+ae^{-x}+bx\,e^{-x}$, $x\in(0,\infty)$.

21. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda)=\lambda^2+4$, char. čísla $\lambda=\pm2j$; fund. syst. $\{\sin(2t),\cos(2t)\}$; obecné řešení homogenní rovnice je
$x_h(t)=a\sin(2t)+b\cos(2t)$, $t\in I\!R$.
Pravá strana není speciální, proto variace konstanty: $x(t)=a(t)\sin(2t)+b(t)\cos(2t)$, rovnice

$$\begin{aligned} a'(t)\sin(2t)+b'(t)\cos(2t)&=0\\ 2a'(t)\cos(2t)-2b'(t)\sin(2t)&=8\sin^2(2t)\end{aligned} \implies \begin{aligned} a'(t)&=2\sin^2(2t)\cos(2t)\\ b'(t)&=-2\sin^3(2t)\end{aligned}$$
$$\implies \begin{aligned} a(t)&=\tfrac13\sin^3(2t)\\ b(t)&=\cos(2t)-\tfrac13\cos^3(2t)\end{aligned}$$

($b(t)$ se dělá $\int(\cos^2(2t)-1)2\sin(2t)\,dt$ a substitucí $z=\cos(2t)$).
Proto $x_p(t)=\frac13\sin^3(2t)\sin(2t)+\big(\cos(2t)-\frac13\cos^3(2t)\big)\cos(2t)$ a $x=x_p+x_h$. Obecné řešení je

$$\begin{aligned} x(t)&=\tfrac13\big(\sin^4(2t)-\cos^4(2t)\big)+\cos^2(2t)+a\sin(3t)+b\cos(3t)\\ &=\tfrac13\big(\sin^2(2t)+\cos^2(2t)\big)\big(\sin^2(2t)-\cos^2(2t)\big)+\cos^2(2t)+a\sin(3t)+b\cos(3t)\\ &=\tfrac13\big(1-2\cos^2(2t)\big)+\cos^2(2t)+a\sin(3t)+b\cos(3t)=\tfrac13+\tfrac13\cos^2(2t)+a\sin(3t)+b\cos(3t),\end{aligned}$$

$t\in I\!R$.

Alternativa: Přepis: $\ddot{x}+4x=4(1-\cos(4t))$, pravá strana je speciální, přesněji kombinace dvou speciálních pravých stran.
1) 4: $d=0$; $\alpha=0$ a $\beta=0$, násobnost $\alpha+\beta j=0$ jako char. č. je $m=0$; proto $x_1(t)=A$.
2) $-4\cos(4t)=e^{0\cdot t}[0\sin(4\cdot t)+(-4)\cos(4\cdot t)]$: $d=0$; $\alpha=0$ a $\beta=4$, násobnost $\alpha+\beta j=4j$ jako char. č. je $m=0$; proto $x_2(t)=t^0e^0[B\sin(4t)+C\cos(4t)]$.

Odhad partikulárního řešení $x_p(t) = x_1(t) + x_2(t) = A + B\sin(4t) + C\cos(4t)$, dosadíme do dané rovnice a dostaneme

$$4A - 12B\sin(4t) - 13C\cos(4t) = 4 - 4\cos(4t),\text{ odtud } A = 1,\ B = 0,\ C = \tfrac{1}{3},$$

obecné řešení je $x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos^2(2t) + a\sin(3t) + b\cos(3t)$, $t \in I\!R$.

22. Levá strana je lineární s konstantními koeficienty. Char. pol. $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$, char. čísla $\lambda = \pm 2j$; fund. syst. $\{\sin(2t), \cos(2t)\}$; obecné řešení homogenní rovnice je $x_h(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t)$, $t \in I\!R$.

Pravá strana není speciální, proto variace konstanty: $x(t) = a(t)\sin(2t) + b(t)\cos(2t)$, rovnice

$$\begin{aligned} a'(t)\sin(2t) + b'(t)\cos(2t) &= 0 \\ 2a'(t)\cos(2t) - 2b'(t)\sin(2t) &= -8\operatorname{cotg}(2t) \end{aligned} \implies \begin{aligned} a'(t) &= -2\operatorname{cotg}(2t)\cos(2t) \\ b'(t) &= 2\cos(2t) \end{aligned}$$

$$\implies \begin{aligned} a(t) &= \tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{\cos(2t)-1}{\cos(2t)+1}\right| \\ b(t) &= \sin(2t) \end{aligned}$$

$a(t)$ se dělá $\int -2\frac{\cos^2(2t)}{\sin(2t)}\,dt = \int -\frac{\cos^2(2t)}{\sin^2(2t)}2\sin(2t)\,dt = \int \frac{\cos^2(2t)}{\cos^2(2t)-1}2\sin(2t)\,dt$, subst. $z = \cos(2t)$, $\int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\,dz = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|$.

Proto $x_p(t) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos(2t)-1}{\cos(2t)+1}\right|\sin(2t) + \sin(2t)\cos(2t)$ a $x = x_p + x_h$. Obecné řešení je $x(t) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos(2t)-1}{\cos(2t)+1}\right|\sin(2t) + \sin(2t)\cos(2t) + a\sin(3t) + b\cos(3t)$, $t \neq \frac{\pi}{2}k$.