ODR: Cvičné příklady—homogenní soustavy rovnic

Pro následující soustavy rovnic najděte obecné řešení. Použijte maticový přístup, a kdo chce, udělá si pro zábavu i eliminaci.
Pro každou soustavu také určete stabilitu triviálního stacionárního řešení $y_1(x) = y_2(x) = 0$.
Pro soustavy 2×2 pak diskutujte typické asymptotické chování na okolí nekonečna a najděte příslušné partikulární řešení pro zadané počáteční podmínky.

1. $y_1' = -2y_1 + 4y_2$, $y_2' = y_1 + y_2$ $\quad y_1(0) = 4,\ y_2(0) = -1;$

2. $y_1' = 2y_1 + y_2$, $y_2' = y_1 + 2y_2$ $\quad y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 1;$

3. $y_1' = y_1 - 3y_2$, $y_2' = 3y_1 + y_2$ $\quad y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1;$

4. $y_1' = 2y_1 - 3y_2$, $y_2' = 3y_1 - 4y_2$ $\quad y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 1;$

5. $y_1' = y_1 + 4y_2$, $y_2' = 3y_1 + 2y_2$ $\quad y_1(0) = 3,\ y_2(0) = -4;$

6. $\dot{x}_1 = x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$ $\quad x_1(\pi) = -1,\ x_2(\pi) = 0;$

7. $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 + 4x_2$ $\quad x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 1;$

8. $x_1' = 3x_1 - x_2$, $x_2' = x_1 + x_2$ $\quad x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0;$

9. $y_1' = y_1 + y_3$, $y_2' = y_1 - y_2$, $y_3' = y_1 + y_3$

10. $y_1' = y_1 + 2y_3$, $y_2' = y_1 + y_3$, $y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3$

11. $x_1' = x_1 - x_3$, $x_2' = x_1 + x_2 + x_3$, $x_3' = 2x_1 + x_2$

Řešení

1. 1) obecné řešení. **Vlastní čísla:** $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ dá $\lambda = -3, 2$.

$\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_1 - v_2 = 0$, volím $v_2 = 1$, pak $v_1 = 1$, $\vec{y}_a(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}$.

$\lambda = -3$: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_1 + 4v_2 = 0$, volím $v_2 = 1$, pak $v_1 = -4$, $\vec{y}_b(x) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3x}$.

Obecné řešení $\vec{y}(x) = a\vec{y}_a + b\vec{y}_b = a\begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -4e^{-3x} \\ e^{-3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2x} - 4be^{-3x} \\ ae^{2x} + be^{-3x} \end{pmatrix}$.

Přepis: $y_1(x) = ae^{2x} - 4be^{-3x}$, $y_2(x) = ae^{2x} + be^{-3x}$, $x \in I\!R$.

Poznámka: Fundamentální matice $Y(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & -4e^{-3x} \\ e^{2x} & e^{-3x} \end{pmatrix}$.

Pro $x \sim \infty$ je $y_1(x) \sim ae^{2x}$, $y_2(x) \sim ae^{2x}$.

Stacionární řešení $y_1(x) = y_2(x) = 0$, popřípadě rovnovážný bod $(0,0)$ jsou nestabilní.

Bonus: $(0,0)$ je sedlo.

Eliminace: Z (#2) $y_1 = y_2' - y_2$ $(*)$, do (#1) dá $y_2'' + y_2' - 6y_2 = 0$, char. č. $\lambda = -3, 2$, řešení $y_2(x) = ae^{2x} + be^{-3x}$, z $(*)$ máme $y_1(x) = ae^{2x} - 4be^{-3x}$.

2) **Poč. podmínky** dají $y_1(x) = 4e^{-3x}$, $y_2(x) = -e^{-3x}$, $x \in I\!R$.

2. 1) obecné řešení. **Vlastní čísla:** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ dá $\lambda = 1, 3$.

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_1 + v_2 = 0$, volím $v_2 = -1$, pak $v_1 = 1$, $\vec{y}_a(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{x}$.

$\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_1 - v_2 = 0$, volím $v_2 = 1$, pak $v_1 = 1$, $\vec{y}_b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$.

Obecné řešení $\vec{y}(x) = a\vec{y}_a + b\vec{y}_b = a\begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{x} + be^{3x} \\ -ae^{x} + be^{3x} \end{pmatrix}$.

Přepis: $y_1(x) = ae^{x} + be^{3x}$, $y_2(x) = -ae^{x} + be^{3x}$, $x \in I\!R$.

Poznámka: Fundamentální matice $Y(x) = \begin{pmatrix} e^{x} & e^{3x} \\ -e^{x} & e^{3x} \end{pmatrix}$.

Pro $x \sim \infty$ je $y_1(x) \sim b\,e^{3x}$, $y_2(x) \sim b\,e^{3x}$.

Stacionární řešení $y_1(x) = y_2(x) = 0$, popřípadě rovnovážný bod $(0,0)$ jsou nestabilní.

Bonus: $(0,0)$ je nestabilní uzel.

Eliminace: Z (#1) $y_2 = y_1' - 2y_1$ $(*)$, do (#2) dá $y_1'' - 4y_1' + 3y_1 = 0$, char. č. $\lambda = 1, 3$, řešení $y_1(x) = ae^{x} + be^{3x}$, z $(*)$ máme $y_2(x) = -ae^{x} + be^{3x}$.

2) **Poč. podmínky** dají $y_1(x) = e^{3x} + e^{x}$, $y_2(x) = e^{3x} - e^{x}$, $x \in I\!R$.

3. 1) obecné řešení. **Vlastní čísla:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ dá $\lambda = 1 \pm 3i$.

$\lambda = 1 - 3i$: $\begin{pmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $3iv_1 - 3v_2 = 0$, volím $v_2 = 1$, pak $v_1 = -i$,

tedy $\vec{y}_C(x) = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-3i)x} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} [e^x\cos(3x) - ie^x\sin(3x)] = \begin{pmatrix} -ie^x\cos(3x) - e^x\sin(3x) \\ e^x\cos(3x) - ie^x\sin(3x) \end{pmatrix}$.

Vezmeme $\vec{y}_a(x) = \mathrm{Re}(\vec{y}_C) = \begin{pmatrix} -e^x\sin(3x) \\ e^x\cos(3x) \end{pmatrix}$, $\vec{y}_b(x) = \mathrm{Im}(\vec{y}_C) = \begin{pmatrix} -e^x\cos(3x) \\ -e^x\sin(3x) \end{pmatrix}$.

Obecné řešení

$$\vec{y}(x) = (-a)\vec{y}_a + (-b)\vec{y}_b = a\begin{pmatrix} e^x\sin(3x) \\ -e^x\cos(3x) \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} e^x\cos(3x) \\ e^x\sin(3x) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ae^x\sin(3x) + be^x\cos(3x) \\ -ae^x\cos(3x) + be^x\sin(3x) \end{pmatrix}.$$

Přepis: $y_1(x) = ae^x\sin(3x) + be^x\cos(3x)$, $y_2(x) = -ae^x\cos(3x) + be^x\sin(3x)$, $x \in I\!R$.

Poznámka: Fundamentální matice $Y(x) = \begin{pmatrix} e^x\sin(3x) & e^x\cos(3x) \\ -e^x\cos(3x) & e^x\sin(3x) \end{pmatrix}$.

Pro $x \sim \infty$ se řešení nedá zjednodušit.

Stacionární řešení $y_1(x) = y_2(x) = 0$, popřípadě rovnovážný bod $(0,0)$ jsou nestabilní.

Bonus: $(0,0)$ je nestabilní ohnisko.

Eliminace: Z (#1) $y_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_1'$ $(*)$, do (#2) dá $\frac{1}{3}y_1'' - \frac{2}{3}y_1' + \frac{10}{3}y_1 = 0$, char. č. $\lambda = 1 \pm 3j$, řešení $y_1(x) = ae^x\sin(3x) + be^x\cos(3x)$, z $(*)$ máme $y_2(x) = -ae^x\cos(3x) + be^x\sin(3x)$.
2) **Poč. podmínky** dají $y_1(x) = e^x[\cos(3x) - \sin(3x)]$, $y_2(x) = e^x[\cos(3x) + \sin(3x)]$, $x \in I\!R$.

4. 1) obecné řešení. **Vlastní čísla:** $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 = 0$ dá $\lambda = -1$ $(2\times)$.
$\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $3v_1 - 3v_2 = 0$, volím $v_2 = 1$, pak $v_1 = 1$, $\vec{y}_a(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$.
Druhé řešení: $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tedy $3v_1 - 3v_2 = 1$, volba $v_2 = 0$ dá $v_1 = \frac{1}{3}$,
$\vec{y}_b(x) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}\right] e^{-x} = \begin{pmatrix} (x+\frac{1}{3})e^{-x} \\ x\,e^{-x} \end{pmatrix}$.
Obecné řešení $\vec{y}(x) = a\vec{y}_a + b\vec{y}_b = a\begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} (x+\frac{1}{3})e^{-x} \\ x\,e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{-x} + b(x+\frac{1}{3})e^{-x} \\ ae^{-x} + bx\,e^{-x} \end{pmatrix}$.
Přepis: $y_1(x) = ae^{-x} + b(x+\frac{1}{3})e^{-x}$, $y_2(x) = ae^{-x} + bx\,e^{-x}$, $x \in I\!R$.
Pro $x \sim \infty$ je $y_1(x) \sim 3bx\,e^{2x}$, $y_2(x) \sim 3bx\,e^{2x}$.
Poznámka: Pokud použijeme v kombinaci konstantu $3b$, dostaneme $y_1(x) = ae^{-x} + b(3x+1)e^{-x}$, $y_2(x) = ae^{-x} + 3bx\,e^{-x}$.
Stacionární řešení $y_1(x) = y_2(x) = 0$, popřípadě rovnovážný bod $(0,0)$ jsou stabilní. Vidíme to i z toho, že $\vec{y} \to \vec{0}$ v nekonečnu.
Bonus: $(0,0)$ je stabilní uzel.
Eliminace: Z (#1) $y_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_1'$ $(*)$, do (#2) dá $\frac{1}{3}y_2'' + \frac{2}{3}y_2' + \frac{1}{3}y_2 = 0$, tj. $y_2'' + 2y_2' + y_2 = 0$, char. č. $\lambda = -1$ $(2\times)$, řešení $y_1(x) = ae^{-x} + bx\,e^{-x}$, z $(*)$ máme
$y_2(x) = ae^{-x} + b\big(x - \frac{1}{3}\big)e^{-x}$.
Poznámka: Toto obecné řešení se dostane z toho z maticového přístupu volbou $a = \tilde{a} - \frac{1}{3}$.
Poznámka: Fundamentální matice $Y(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & 3x\,e^{-x} \\ e^{-x} & (3x-1)e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & (3x+1)e^{-x} \\ e^{-x} & 3x\,e^{-x} \end{pmatrix}$.
2) **Poč. podmínky** dají $y_1(x) = (3x+2)e^{-x}$, $y_2(x) = (3x+1)e^{-x}$, $x \in I\!R$.

5. 1) obecné řešení. **Vlastní čísla:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$ dá $\lambda = -2, 5$.
$\lambda = -2$: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $3v_1 + 4v_2 = 0$, volím $v_2 = -3$, pak $v_1 = 4$, $\vec{y}_a(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2x}$.
$\lambda = 5$: $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_1 - v_2 = 0$, volím $v_2 = 1$, pak $v_1 = 1$, $\vec{y}_b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}$.
Obecné řešení $\vec{y}(x) = a\vec{y}_a + b\vec{y}_b = a\begin{pmatrix} 4e^{-2x} \\ -3e^{-2x} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4ae^{-2x} + be^{5x} \\ -3ae^{-2x} + be^{5x} \end{pmatrix}$.
Přepis: $y_1(x) = 4ae^{-2x} + be^{5x}$, $y_2(x) = -3ae^{-2x} + be^{5x}$, $x \in I\!R$.
Poznámka: Fundamentální matice $Y(x) = \begin{pmatrix} 4e^{-2x} & e^{5x} \\ -3e^{-2x} & e^{5x} \end{pmatrix}$.
Pro $x \sim \infty$ je $y_1(x) \to 0$, $y_2(x) \to 0$.
Eliminace: Z (#1) $y_2 = \frac{1}{4}y_1' - \frac{1}{4}y_1$ $(*)$, do (#2) dá $\frac{1}{4}y_1'' - \frac{3}{4}y_1' - \frac{10}{4}y_1 = 0$, tj. $y_1'' - 3y_1' - 10y_1 = 0$, char. č. $\lambda = -2, 5$, řešení $y_1(x) = ae^{-2x} + be^{5x}$, z $(*)$ máme $y_2(x) = -\frac{3}{4}ae^{-2x} + be^{5x}$. Pokud za a dosadíme $4a$, dostaneme stejné řešení jako z vektorového přístupu.
2) **Poč. podmínky** dají $y_1(x) = 4e^{-2x} - e^{5x}$, $y_2(x) = -3e^{-2x} - e^{5x}$, $x \in I\!R$.
Stacionární řešení $y_1(x) = y_2(x) = 0$, popřípadě rovnovážný bod $(0,0)$ jsou nestabilní.
Bonus: $(0,0)$ je sedlo.

6. 1) obecné řešení. **Vlastní čísla:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$ dá $\lambda = \pm i$.
$\lambda = i$: $\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(1-i)v_1 - v_2 = 0$, volím $v_1 = 1$, pak $v_2 = 1 - i$,
tedy $\vec{x}_C(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}[\cos(t) + i\sin(t)] = \begin{pmatrix} \cos(t) + i\sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) + i[\sin(t) - \cos(t)] \end{pmatrix}$.
Vezmeme $\vec{x}_a(t) = \mathrm{Im}(\vec{x}_C) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$, $\vec{x}_b(t) = \mathrm{Re}(\vec{x}_C) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$.
Obecné řešení

$$\vec{x}(t)=a\vec{x}_a+b\vec{x}_b=a\begin{pmatrix}\sin(t)\\ \sin(t)-\cos(t)\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)+\cos(t)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a\sin(t)+b\cos(t)\\ a[\sin(t)-\cos(t)]+b[\sin(t)+\cos(t)]\end{pmatrix}.$$

Přepis: $x_1(t)=a\sin(t)+b\cos(t)$, $x_2(t)=a[\sin(t)-\cos(t)]+b[\sin(t)+\cos(t)]$, $t\in I\!R$.

Poznámka: Fundamentální matice $X(t)=\begin{pmatrix}\sin(t) & \cos(t)\\ \sin(t)-\cos(t) & \sin(t)+\cos(t)\end{pmatrix}$.

Pro $t\sim\infty$ se řešení nedá zjednodušit. Je omezené.

Stacionární řešení $y_1(x)=y_2(x)=0$, popřípadě rovnovážný bod $(0,0)$ jsou nestabilní.

Bonus: $(0,0)$ je střed.

Eliminace: Z (#1) $x_2=x_1-\dot{x}_1$ $(*)$, do (#2) dá $\ddot{x}_1+x_1=0$, char. č. $\lambda=\pm j$, řešení $x_1(t)=a\sin(t)+b\cos(t)$, z $(*)$ máme $x_2(t)=a[\sin(t)-\cos(t)]+b[\sin(t)+\cos(t)]$.

2) **Poč. podmínky** dají $x_1(t)=\sin(t)+\cos(t)$, $x_2(t)=2\sin(t)$, $t\in I\!R$.

7. 1) obecné řešení. **Vlastní čísla:** $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+9=0$ dá $\lambda=3$ $(2\times)$.

$\lambda=3$: $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, $v_1-v_2=0$, volím $v_2=1$, pak $v_1=1$, $\vec{x}_a(t)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{3t}$.

Druhé řešení: $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, tedy $-v_1+v_2=1$, volba $v_2=1$ dá $v_1=0$,

$\vec{x}_b(t)=\left[\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right]e^{3t}=\begin{pmatrix}t\,e^{3t}\\ (t+1)e^{3t}\end{pmatrix}$.

Obecné řešení $\vec{x}(t)=a\vec{x}_a+b\vec{x}_b=a\begin{pmatrix}e^{3t}\\ e^{3t}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}t\,e^{3t}\\ (t+1)e^{3t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae^{3t}+bt\,e^{3t}\\ ae^{3t}+b(t+1)e^{3t}\end{pmatrix}$.

Přepis: $x_1(t)=ae^{3t}+bt\,e^{3t}$, $x_2(t)=ae^{3t}+b(t+1)e^{3t}$, $t\in I\!R$.

Poznámka: Fundamentální matice $X(t)=\begin{pmatrix}e^{3t} & t\,e^{3t}\\ e^{3t} & (t+1)e^{3t}\end{pmatrix}$.

Pro $t\sim\infty$ je $x_1(t)\sim bt\,e^{3t}$, $x_2(t)\sim bt\,e^{3t}$.

Stacionární řešení $y_1(x)=y_2(x)=0$, popřípadě rovnovážný bod $(0,0)$ jsou nestabilní.

Bonus: $(0,0)$ je nestabilní uzel.

Eliminace: Z (#1) $x_2=\dot{x}_1-2x_1$ $(*)$, do (#2) dá $\ddot{x}_1-6\dot{x}_1+9x_1=0$, char. č. $\lambda=3$ $(2\times)$, řešení $x_1(t)=ae^{3t}+bt\,e^{3t}$, z $(*)$ máme $x_2(t)=ae^{3t}+b(t+1)e^{3t}$.

2) **Poč. podmínky** dají $x_1(t)=(2-t)e^{3t}$, $x_2(t)=(1-t)e^{3t}$, $t\in I\!R$.

8. 1) obecné řešení. **Vlastní čísla:** $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+4=0$ dá $\lambda=2$ $(2\times)$.

$\lambda=2$: $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, $v_1-v_2=0$, volím $v_2=1$, pak $v_1=1$, $\vec{x}_a(t)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{2t}$.

Druhé řešení: $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, tedy $v_1-v_2=1$, volba $v_1=0$ dá $v_2=-1$,

$\vec{x}_b(t)=\left[\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\right]e^{2t}=\begin{pmatrix}t\,e^{2t}\\ (t-1)e^{2t}\end{pmatrix}$.

Obecné řešení $\vec{x}(t)=a\vec{x}_a+b\vec{x}_b=a\begin{pmatrix}e^{2t}\\ e^{2t}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}t\,e^{2t}\\ (t-1)e^{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae^{2t}+bt\,e^{2t}\\ ae^{2t}+b(t-1)e^{2t}\end{pmatrix}$.

Přepis: $x_1(t)=ae^{2t}+bt\,e^{2t}$, $x_2(t)=ae^{2t}+b(t-1)e^{2t}$, $t\in I\!R$.

Poznámka: Fundamentální matice $X(t)=\begin{pmatrix}e^{2t} & t\,e^{2t}\\ e^{2t} & (t-1)e^{2t}\end{pmatrix}$.

Pro $t\sim\infty$ je $x_1(t)\sim bt\,e^{2t}$, $x_2(t)\sim bt\,e^{2t}$.

Stacionární řešení $y_1(x)=y_2(x)=0$, popřípadě rovnovážný bod $(0,0)$ jsou nestabilní.

Bonus: $(0,0)$ je nestabilní uzel.

Eliminace: Z (#1) $x_2=3x_1-x_1'$ $(*)$, do (#2) dá $x_1''-4x_1'+4x_1=0$, char. č. $\lambda=2$ $(2\times)$, řešení $x_1(t)=ae^{2t}+bt\,e^{2t}$, z $(*)$ máme $x_2(t)=ae^{2t}+b(t-1)e^{2t}$.

2) **Poč. podmínky** dají $x_1(t)=(t+1)e^{2t}$, $x_2(t)=t\,e^{2t}$, $t\in I\!R$.

9. Vlastní čísla: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 1 & -1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$

$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$ dá $\lambda = 0, -1, 2$.

$\lambda = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, redukce $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, volba parametru $v_3 = -1$ dá $v_2 = 1$, $v_1 = 1$, $\vec{y}_a(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, redukce $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, volba parametru $v_2 = 1$, pak $v_1 = 0$, $v_3 = 0$, $\vec{y}_b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x}$.

$\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, redukce $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, volba parametru $v_3 = 3$ dá $v_2 = 1$, $v_1 = 3$, $\vec{y}_c(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2x}$.

Obecné řešení $\vec{y}(x) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3e^{2x} \\ e^{2x} \\ 3e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3ce^{2x} \\ a + be^{-x} + ce^{2x} \\ -a + 3ce^{2x} \end{pmatrix}$.

Přepis: $y_1(x) = a + 3ce^{2x}$, $y_2(x) = a + be^{-x} + ce^{2x}$, $y_3(x) = -a + 3ce^{2x}$, $x \in I\!R$.

Poznámka: Fundamentální matice $Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3e^{2x} \\ 1 & e^{-x} & e^{2x} \\ -1 & 0 & 3e^{2x} \end{pmatrix}$.

Stacionární řešení $y_1(x) = y_2(x) = 0$, popřípadě rovnovážný bod $(0,0)$ jsou nestabilní.
Bonus: $(0,0)$ je sedlo.

Eliminace: Z (#2) $y_1 = y_2' + y_2$ $(*)$, do (#1) a (#3) dá $\left\{ \begin{matrix} (1^*)\ y_2'' = y_2 + y_3 \\ (2^*)\ y_3' = y_2' + y_2 + y_3 \end{matrix} \right\}$, z (#1*) $y_3 = y_2'' - y_2$ $(\star)$, do (#2*) dá $y_2''' - y_2'' - 2y_2' = 0$. Char. č. $\lambda = 0, -1, 2$, řešení $y_2(x) = a + be^{-x} + ce^{2x}$, z $(\star)$ máme $y_3(x) = -a + 3ce^{2x}$, z $(*)$ máme $y_1(x) = a + 3ce^{2x}$.

10. Vlastní čísla: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 =$

$= -(\lambda - 1)^3 = 0$ dá $\lambda = 1$ $(3\times)$.

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, redukce $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, volba parametru $v_2 = 1$ dá $v_1 = 1$, $v_3 = 0$, $\vec{y}_a(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Druhé řešení: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, redukce $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, volba parametru $v_2 = 0$ dá $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_3 = \frac{1}{2}$, $\vec{y}_b(x) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] e^x = \begin{pmatrix} (x + \frac{1}{2})e^x \\ x\,e^x \\ \frac{1}{2}e^x \end{pmatrix}$.

Třetí řešení: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, redukce $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, volba parametru $v_2 = 0$ dá $v_1 = -\frac{1}{4}$, $v_3 = \frac{1}{4}$,

$$\vec{y}_c(x)=\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}x^2+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}\right]e^x=\begin{pmatrix}(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})e^x\\(\frac{1}{4}x^2)e^x\\(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})e^x\end{pmatrix}.$$

Obecné řešení $\vec{y}(x)=a\begin{pmatrix}e^x\\e^x\\0\end{pmatrix}+(2b)\begin{pmatrix}(x+\frac{1}{2})e^x\\x\,e^x\\\frac{1}{2}e^x\end{pmatrix}+(4c)\begin{pmatrix}(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})e^x\\(\frac{1}{4}x^2)e^x\\(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})e^x\end{pmatrix}$

$$=a\begin{pmatrix}e^x\\e^x\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}(2x+1)e^x\\2x\,e^x\\e^x\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}(x^2+2x-1)e^x\\x^2e^x\\(2x+1)e^x\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}ae^x+b(2x+1)e^x+c(x^2+2x-1)e^x\\ae^x+2bx\,e^x+cx^2e^x\\be^x+c(2x+1)e^x\end{pmatrix}.$$

Přepis: $y_1(x)=ae^x+b(2x+1)e^x+c(x^2+2x-1)e^x$, $y_2(x)=ae^x+2bx\,e^x+cx^2e^x$, $y_3(x)=be^x+c(2x+1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Poznámka: Fundamentální matice $Y(x)=\begin{pmatrix}e^x&(2x+1)e^x&(x^2+2x-1)e^x\\e^x&2x\,e^x&x^2e^x\\0&e^x&(2x+1)e^x\end{pmatrix}$.

Stacionární řešení $y_1(x)=y_2(x)=0$, popřípadě rovnovážný bod $(0,0)$ jsou nestabilní.
Bonus: $(0,0)$ je nestabilní uzel.

Eliminace: Z (#2) $y_3=y_2'-y_1$ $(*)$, do (#1) a (#3) dá $\left\{\begin{matrix}(1^*)\ 2y_2'-y_1'=y_1\\(2^*)\ y_2''-2y_2'-y_1'=y_2-3y_1\end{matrix}\right\}$. Z rovnic nejde dostat ani y_1, ani y_3, nejprve tedy eliminujeme jednu derivaci, zkusíme y_1' pomocí (#2*)−(#1*): $y_2''-4y_2'=y_2-4y_1$, tedy $y_1=-\frac{1}{4}y_2''+y_2'+\frac{1}{4}y_2$ $(\star)$, do (#1*) dá $\frac{1}{4}y_2'''-\frac{3}{4}y_2''+\frac{3}{4}y_2'-\frac{1}{4}y_2=0$, tj. $y_2'''-3y_2''+3y_2'-y_2=0$. Char. č. $\lambda=1$ $(3\times)$, řešení $y_2(x)=ae^x+bx\,e^x+cx^2e^x$, z $(\star)$ máme $y_1(x)=ae^x+b\big(x+\frac{1}{2}\big)e^x+c\big(x^2+x-\frac{1}{2}\big)e^x$, z $(*)$ máme $y_3(x)=b\frac{1}{2}e^x+c\big(x+\frac{1}{2}\big)e^x$.

11. Vlastní čísla: $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-1\\1&1-\lambda&1\\2&1&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda$

$=-\lambda(\lambda^2-2\lambda+2)=0$ dá $\lambda=0,1\pm i$.

$\lambda=0$: $\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, redukce $\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, volba parametru $v_3=1$ dá $v_2=-2$, $v_1=1$, $\vec{x}_a(t)=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

$\lambda=1-i$: $\begin{pmatrix}i&0&-1\\1&i&1\\2&1&i-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, redukce $\begin{pmatrix}i&0&-1\\1&i&1\\2&1&i-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&i\\0&1&-1-i\\0&0&0\end{pmatrix}$,
volba parametru $v_3=1$, $v_1=-i$, $v_2=1+i$,

tedy $\vec{x}_C(t)=\begin{pmatrix}-i\\1+i\\1\end{pmatrix}e^{(1-i)t}=\begin{pmatrix}-i\\1+i\\1\end{pmatrix}e^t[\cos(t)-i\sin(t)]$

$$=\begin{pmatrix}-e^t\sin(t)-ie^t\cos(t)\\e^t[\cos(t)+\sin(t)]+ie^t[-\sin(t)+\cos(t)]\\e^t\cos(t)-ie^t\sin(t)\end{pmatrix}.$$

Vezmeme $\vec{x}_b(t)=\mathrm{Re}(\vec{x}_C)=\begin{pmatrix}-e^t\sin(t)\\e^t[\sin(t)+\cos(t)]\\e^t\cos(t)\end{pmatrix}$, $\vec{x}_c(t)=\mathrm{Im}(\vec{x}_C)=\begin{pmatrix}-e^t\cos(t)\\e^t[-\sin(t)+\cos(t)]\\-e^t\sin(t)\end{pmatrix}$,

Obecné řešení:

$$\vec{x}(t)=a\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-e^t\sin(t)\\-e^t[\sin(t)+\cos(t)]\\e^t\cos(t)\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-e^t\cos(t)\\e^t[-\sin(t)+\cos(t)]\\-e^t\sin(t)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a-be^t\sin(t)-ce^t\cos(t)\\-2a+be^t\sin(t)+be^t\cos(t)-ce^t\sin(t)+ce^t\cos(t)\\a+be^t\cos(t)-ce^t\sin(t)\end{pmatrix}.$$

Přepis: $x_1(t) = a - be^t\sin(t) - ce^t\cos(t)$, $x_2(t) = -2a + be^t\sin(t) + be^t\cos(t) - ce^t\sin(t) + ce^t\cos(t)$, $x_3(t) = a + be^t\cos(t) - ce^t\sin(t)$, $t \in I\!R$.

Poznámka: Fundamentální matice $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t\sin(t) & e^t\cos(t) \\ -2 & -e^t[\sin(t)+\cos(t)] & e^t[\sin(t)-\cos(t)] \\ 1 & -e^t\cos(t) & e^t\sin(t) \end{pmatrix}$.

Stacionární řešení $y_1(x) = y_2(x) = 0$, popřípadě rovnovážný bod $(0,0)$ jsou nestabilní.
Bonus: $(0,0)$ je nestabilní ohnisko.

Eliminace: Z (#1) $x_3 = x_1 - x_1'$ $(*)$, do (#2) a (#3) dá $\left\{ \begin{matrix} (1^*)\ x_1' + x_2' = 2x_1 + x_2 \\ (2^*)\ x_1' - x_1'' = 2x_1 + x_2 \end{matrix} \right\}$,
z (#2*) $x_2 = x_1' - x_1'' - 2x_1$ $(\star)$, do (#1*) dá $x_1''' - 2x_1'' + 2x_1' = 0$. Char. č. $\lambda = 0, 1 \pm j$,
řešení $x_1(t) = a + be^t\sin(t) + ce^t\cos(t)$,
z $(\star)$ máme $x_2(t) = -2a - be^t\sin(t) - be^t\cos(t) + ce^t\sin(t) - ce^t\cos(t)$,
z $(*)$ máme $x_3(t) = a - be^t\cos(t) + ce^t\sin(t)$.
Poznámka: Vidíme, že eliminace vedla na dva vektory báze s opačným znaménkem než u maticového přístupu, což ale samozřejmě dává stejný prostor řešení.