ODR: Cvičné příklady—nehomogenní soustavy rovnic

Vyřešte následující soustavy rovnic. Použijte maticový přístup, a kdo chce, udělá si pro zábavu i eliminaci.

1. $y_1' = y_1 - y_2 + 2e^x$
$y_2' = -y_1 + y_2 + e^x$ $\qquad y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 3;$

2. $x_1' = x_1 - x_2 + 9$
$x_2' = 10x_1 - x_2 + 10e^t$ $\qquad x_1(0) = -1,\ x_2(0) = 6.$

Najděte obecné řešení následující soustavy rovnic.

3. $y_1' = y_1 + y_3 + 6e^x$
$y_2' = y_1 - y_2 - 6$
$y_3' = y_1 + y_3$

Řešení

1. 1) obecné řešení. **Vlastní čísla:** $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda=0$ dá $\lambda=0,2$.

$\lambda=0$: $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $v_1-v_2=0$, volím $v_2=1$, pak $v_1=1$, $\vec{y}_a(x)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

$\lambda=2$: $\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $-v_1-v_2=0$, volím $v_2=-1$, pak $v_1=1$, $\vec{y}_b(x)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{2x}$.

Obecné řešení přidružené homogenní $\vec{y}_h(x)=a\vec{y}_a+b\vec{y}_b=a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}e^{2x}\\-e^{2x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+be^{2x}\\a-be^{2x}\end{pmatrix}$.

Přepis: $y_{1h}(x)=a+be^{2x}$, $y_{2h}(x)=a-be^{2x}$, $x\in I\!R$.

Poznámka: Fundamentální matice $Y(x)=\begin{pmatrix}1&e^{2x}\\1&-e^{2x}\end{pmatrix}$.

Nenulová pravá strana: Metoda odhadu. Jeden faktor e^x s $\lambda=1$, bez korekce. Odhad $y_{1p}=A\,e^x$, $y_{2p}=B\,e^x$. Dosazení do rovnic dá $A\,e^x=A\,e^x-B\,e^x+2e^x$, $B\,e^x=-A\,e^x+B\,e^x+e^x$, odtud $A=1$, $B=2$. Řešení: $y_{1p}(x)=e^x$, $y_{2p}(x)=2e^x$.

Obecné řešení: $y_1(x)=e^x+a+be^{2x}$, $y_2(x)=2e^x+a-be^{2x}$, $x\in I\!R$.

Alternativa: variace konstanty. Obecné řešení přidružené homogenní $\vec{y}_h=Y(x)\vec{c}$, variace $\vec{y}_p(x)=Y(x)\vec{c}(x)$, rovnice $Y(x)\vec{c}\,'(x)=\vec{b}(x)$. Chce to Y^{-1}:

$\begin{pmatrix}1&e^{2x}&1&0\\1&-e^{2x}&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac12&\frac12\\0&1&\frac12e^{-2x}&-\frac12e^{-2x}\end{pmatrix}$, tedy $Y^{-1}(x)=\frac12\begin{pmatrix}1&1\\e^{-2x}&-e^{-2x}\end{pmatrix}$.

Pak $\vec{c}\,'=Y^{-1}\vec{b}=\frac12\begin{pmatrix}1&1\\e^{-2x}&-e^{-2x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2e^x\\e^x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac32e^x\\\frac12e^{-x}\end{pmatrix}$, tedy $\vec{c}(x)=\begin{pmatrix}\frac32e^x\\-\frac12e^{-x}\end{pmatrix}$ a

$\vec{y}_p(x)=Y(x)\vec{c}(x)=\begin{pmatrix}e^x\\2e^x\end{pmatrix}$. Proto $\vec{y}(x)=\vec{y}_p(x)+\vec{y}_h(x)=\begin{pmatrix}e^x+a+be^{2x}\\2e^x+a-be^{2x}\end{pmatrix}$, $x\in I\!R$.

Alternativa: řádková variace. Nejprve homogenní řešení (eliminací nebo vlastními čísly):
$\left\{\begin{array}{l}y_{1h}(x)=a+be^{2x}\\y_{2h}(x)=a-be^{2x}\end{array}\right\}$, pak variace $\left\{\begin{array}{l}y_{1p}(x)=a(x)+b(x)e^{2x}\\y_{2p}(x)=a(x)-b(x)e^{2x}\end{array}\right\}$. Rovnice $\left\{\begin{array}{l}a'(x)+b'(x)e^{2x}=2e^x\\a'(x)-b'(x)e^{2x}=e^x\end{array}\right\}$ dají $\left\{\begin{array}{l}a'(x)=\frac32e^x\\b'(x)=\frac12e^{-x}\end{array}\right\}$, tedy $\left\{\begin{array}{l}a(x)=\frac32e^x\\b(x)=-\frac12e^{-x}\end{array}\right\}$ a $\left\{\begin{array}{l}y_{1p}(x)=e^x\\y_{2p}(x)=2e^x\end{array}\right\}$.

Eliminace: Z (#1) $y_2=y_1-y_1'+2e^x$ $(*)$, do (#2) dá $y_1''-2y_1'=-e^x$, char. č. $\lambda=0,2$, řešení homogenní rovnice $y_h(x)=a+be^{2x}$. Nenulová pravá strana nejlépe odhadem, $y_p=Ae^x$, dosazení do $y_1''-2y_1'=-e^x$ dá $A=1$, proto $y_1(x)=y_p+y_h=e^x+a+be^{2x}$, z $(*)$ máme $y_2(x)=2e^x+a-be^{2x}$.
Obecné řešení $y_1(x)=e^x+a+be^{2x}$, $y_2(x)=2e^x+a-be^{2x}$, $x\in I\!R$.
2) **Poč. podmínky** dají $y_1(x)=e^x-e^{2x}$, $y_2(x)=2e^x+e^{2x}$, $x\in I\!R$.

2. 1) obecné řešení. **Vlastní čísla:** $A=\begin{pmatrix}1&-1\\10&-1\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\10&-1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+9=0$ dá $\lambda=\pm3i$.

$\lambda=3i$: $\begin{pmatrix}1-3i&-1\\10&-1-3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $(1-3i)v_1-v_2=0$, volím $v_1=1$, pak $v_2=1-3i$,

tedy $\vec{x}_C(t)=\begin{pmatrix}1\\1-3i\end{pmatrix}e^{3it}=\begin{pmatrix}1\\1-3i\end{pmatrix}[\cos(3t)+i\sin(3t)]$

$$=\begin{pmatrix}\cos(3t)+i\sin(3t)\\\cos(3t)+3\sin(3t)+i[\sin(3t)-3\cos(3t)]\end{pmatrix}.$$

Vezmeme $\vec{x}_a(t)=\mathrm{Im}(\vec{x}_C)=\begin{pmatrix}\sin(3t)\\\sin(3t)-3\cos(3t)\end{pmatrix}$, $\vec{x}_b(t)=\mathrm{Re}(\vec{x}_C)=\begin{pmatrix}\cos(3t)\\3\sin(3t)+\cos(3t)\end{pmatrix}$.

Obecné řešení přidružené homogenní

$$\vec{x}_h(t)=a\vec{x}_a+b\vec{x}_b=a\begin{pmatrix}\sin(3t)\\\sin(3t)-3\cos(3t)\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\cos(3t)\\3\sin(3t)+\cos(3t)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a\sin(3t)+b\cos(3t)\\a[\sin(3t)-3\cos(3t)]+b[3\sin(3t)+\cos(3t)]\end{pmatrix},\ t\in I\!R.$$

Přepis: $x_{1h}(t)=a\sin(3t)+b\cos(3t)$, $x_{2h}(t)=a[\sin(3t)-3\cos(3t)]+b[3\sin(3t)+\cos(3t)]$, $t\in I\!R$.

Poznámka: Fundamentální matice $X(t)=\begin{pmatrix}\sin(3t)&\cos(3t)\\\sin(3t)-3\cos(3t)&3\sin(3t)+\cos(3t)\end{pmatrix}$.

Nenulová pravá strana: Odhad řešení. Faktor 9 s $\lambda=0$, bez korekce. Faktor $10e^t$ s $\lambda=1$, bez korekce.
Odhad $x_{1p}=A+B\,e^t$, $x_{2p}=C+D\,e^t$.

Dosazení do rovnic dá $B\,e^t = A + B\,e^t - C - D\,e^t + 9$, $D\,e^t = 10A + 10B\,e^t - C - D\,e^t + 10e^t$, odtud $(C-A) + D\,e^t = 9$, $(C-10A) + (2D-10B)e^t = 10e^t$, odtud $A=1$, $B=-1$, $C=10$, $D=0$. Řešení $x_{1p} = 1 - e^t$, $x_{2p} = 10$.
Obecné řešení:
$x_1(t) = 1 - e^t + a\sin(3t) + b\cos(3t)$, $x_2(t) = 10 + a[\sin(3t) - 3\cos(3t)] + b[3\sin(3t) + \cos(3t)]$, $t \in I\!R$.
Alternativa: variace konstanty. Obecné řešení přidružené homogenní $\vec{x}_h = X(t)\vec{c}$, variace $\vec{x} + p(t) = X(t)\vec{c}(t)$, rovnice $X(t)\vec{c}\,'(t) = \vec{b}(t)$. Chce to X^{-1}:
$$\begin{pmatrix} \sin(3t) & \cos(3t) & 1 & 0 \\ \sin(3t) - 3\cos(3t) & 3\sin(3t) + \cos(3t) & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin(3t) + \frac{1}{3}\cos(3t) & -\frac{1}{3}\cos(3t) \\ 0 & 1 & \cos(3t) - \frac{1}{3}\sin(3t) & \frac{1}{3}\sin(3t) \end{pmatrix},$$
tedy $X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \sin(3t) + \frac{1}{3}\cos(3t) & -\frac{1}{3}\cos(3t) \\ \cos(3t) - \frac{1}{3}\sin(3t) & \frac{1}{3}\sin(3t) \end{pmatrix}$.
Pak $\vec{c}\,' = X^{-1}\vec{b} \begin{pmatrix} \sin(3t) + \frac{1}{3}\cos(3t) & -\frac{1}{3}\cos(3t) \\ \cos(3t) - \frac{1}{3}\sin(3t) & \frac{1}{3}\sin(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 10e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\sin(3t) + 3\cos(3t) - \frac{10}{3}e^t\cos(3t) \\ 9\cos(3t) - 3\sin(3t) + \frac{10}{3}e^t\sin(3t) \end{pmatrix}$,
tedy $\vec{c}(x) = \begin{pmatrix} -3\cos(3t) + \sin(3t) - \frac{1}{3}e^t\cos(3t) - e^t\sin(3t) \\ 3\sin(3t) + \cos(3t) + \frac{1}{3}e^t\sin(3t) - e^t\cos(3t) \end{pmatrix}$ a $\vec{x}_p(t) = X(t)\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} 1 - e^t \\ 10 \end{pmatrix}$.
Proto $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 - e^t + a\sin(3t) + b\cos(3t) \\ 10 + a[\sin(3t) - 3\cos(3t)] + b[3\sin(3t) + \cos(3t)] \end{pmatrix}$, $t \in I\!R$.
Alternativa: řádková variace. Nejprve homogenní řešení (eliminací nebo vlastními čísly):
$$\left\{\begin{aligned} x_{1h}(t) &= a\sin(3t) + b\cos(3t) \\ x_{2h}(t) &= a[\sin(3t) - 3\cos(3t)] + b[3\sin(3t) + \cos(3t)] \end{aligned}\right\},$$
pak variace $\left\{\begin{aligned} x_{1p}(t) &= a(t)\sin(3t) + b(t)\cos(3t) \\ x_{2p}(t) &= a(t)[\sin(3t) - 3\cos(3t)] + b(t)[3\sin(3t) + \cos(3t)] \end{aligned}\right\}$.
Rovnice $\left\{\begin{aligned} &a'(t)\sin(3t) + b'(t)\cos(3t) = 9 \\ &a'(t)[\sin(3t) - 3\cos(3t)] + b'(t)[3\sin(3t) + \cos(3t)] = 10e^t \end{aligned}\right\}$ dají
$\left\{\begin{aligned} a'(t) &= 9\sin(3t) + 3\cos(3t) - \tfrac{10}{3}e^t\cos(3t) \\ b'(t) &= 9\cos(3t) - 3\sin(3t) + \tfrac{10}{3}e^t\sin(3t) \end{aligned}\right\}$, tedy
$\left\{\begin{aligned} a(t) &= -3\cos(3t) + \sin(3t) - \tfrac{1}{3}e^t\cos(3t) - e^t\sin(3t) \\ b(t) &= 3\sin(3t) + \cos(3t) + \tfrac{1}{3}e^t\sin(3t) - e^t\cos(3t) \end{aligned}\right\}$ a $\left\{\begin{aligned} x_{1p}(t) &= 1 - e^t \\ x_{2p}(t) &= 10 \end{aligned}\right\}$.
Eliminace: Z (#1) $x_2 = x_1 - x_1' + 9$ $(*)$, do (#2) dá $x_1'' + 9x_1 = 9 - 10e^t$, char. č. $\lambda = \pm 3j$, řešení homogenní rovnice $x_h(t) = a\sin(3t) + b\cos(3t)$. Nenulová pravá strana nejlépe odhadem, $x_p = A + Be^t$, dosazení do $x_1'' + 9x_1 = 9 - 10e^t$ dá $A = 1$, $B = -1$, proto $x_1(t) = x_p + x_h = 1 - e^t + a\sin(3t) + b\cos(3t)$, z $(*)$ máme $x_2(t) = 10 + a[\sin(3t) - 3\cos(3t)] + b[3\sin(3t) + \cos(3t)]$.
Obecné řešení $x_1(t) = 1 - e^t + a\sin(3t) + b\cos(3t)$, $x_2(t) = 10 + a[\sin(3t) - 3\cos(3t)] + b[3\sin(3t) + \cos(3t)]$.
2) **Poč. podmínky** dají $x_1(t) = 1 - e^t + \sin(3t) - \cos(3t)$, $x_2(t) = 10 - 2\sin(3t) - 4\cos(3t)$, $t \in I\!R$.

3. Vlastní čísla: $\lambda = 0, -1, 2$, $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} a + 3ce^{2x} \\ a + be^{-x} + ce^{2x} \\ -a + 3ce^{2x} \end{pmatrix}$, $x \in I\!R$, viz Homogenní soustavy.
Poznámka: Fundamentální matice $Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3e^{2x} \\ 1 & e^{-x} & e^{2x} \\ -1 & 0 & 3e^{2x} \end{pmatrix}$.
Nenulová pravá strana: odhad řešení. Faktor $6e^x$ s $\lambda = 1$, bez korekce. Faktor -6 s $\lambda = 0$, korekce $m = 1$. Nutno dávat členy s i bez korekcí.
Odhad $y_{1p} = A\,e^x + B + Cx$, $y_{2p} = D\,e^x + E + Fx$, $y_{3p} = G\,e^x + H + Ix$.
Dosazení do rovnic dá $A\,e^x + C = A\,e^x + B + Cx + G\,e^x + H + Ix + 6e^x$,
$D\,e^x + F = A\,e^x + B + Cx - D\,e^x - E - Fx - 6$, $G\,e^x + I = A\,e^x + B + Cx + G\,e^x + H + Ix$.
Odtud $-G\,e^x + (C - B - H) - (C + I)x = 6e^x$, $(2D - A)\,e^x + (F + E - B) + (F - C)x = -6$, $-A\,e^x - (B + H) - (C + I)x = 0$,
odtud $A = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $F = 0$, $G = -6$, $I = 0$. Také dvě nezávislé rovnice pro tři proměnné $B + H = 0$, $E - B = -6$, volíme $B = 0$, pak $H = 0$, $E = -6$. Řešení $y_{1p} = 0$, $y_{2p} = -6$, $y_{3p} = -6e^x$.
Obecné řešení: $y_1(x) = a + 3ce^{2x}$, $y_2(x) = -6 + a + be^{-x} + ce^{2x}$, $y_3(x) = -6e^x - a + 3ce^{2x}$.
Alternativa: variace konstanty. Obecné řešení přidružené homogenní $\vec{y}_h = Y(x)\vec{c}$, variace $\vec{y}_p(x) = Y(x)\vec{c}(x)$, rovnice $Y(x)\vec{c}\,'(x) = \vec{b}(x)$. Chce to Y^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3e^{2x} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & e^{-x} & e^{2x} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3e^{2x} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3}e^{x} & e^{x} & \frac{1}{3}e^{x} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6}e^{-2x} & 0 & \frac{1}{6}e^{-2x} \end{pmatrix},$$

tedy $Y^{-1}(x) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -4e^{x} & 6e^{x} & 2e^{x} \\ e^{-2x} & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix}$.

Pak $\vec{c}\,' = Y^{-1}\vec{b} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -4e^{x} & 6e^{x} & 2e^{x} \\ e^{-2x} & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6e^{x} \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{x} \\ -4e^{2x} - 6e^{x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}$,

tedy $\vec{c}(x) = \begin{pmatrix} 3e^{x} \\ -2e^{2x} - 6e^{x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}$ a $\vec{y}_p(x) = Y(x)\vec{c}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6e^{x} \end{pmatrix}$, proto

$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} a + 3ce^{2x} \\ -6 + a + be^{-x} + ce^{2x} \\ -6e^{x} - a + 3ce^{2x} \end{pmatrix}$.

Alternativa: řádková variace. Nejprve homogenní řešení (eliminací nebo vlastními čísly):
$\left\{\begin{array}{l} y_{1h}(x) = a + 3ce^{2x} \\ y_{2h}(x) = a + be^{-x} + ce^{2x} \\ y_{3h}(x) = -a + 3ce^{2x} \end{array}\right\}$, pak variace $\left\{\begin{array}{l} y_{1p}(x) = a(x) + 3c(x)e^{2x} \\ y_{2p}(x) = a(x) + b(x)e^{-x} + c(x)e^{2x} \\ y_{3p}(x) = -a(x) + 3c(x)e^{2x} \end{array}\right\}$.

Rovnice $\left\{\begin{array}{l} a'(x) + 3c'(x)e^{2x} = 6e^{x} \\ a'(x) + b'(x)e^{-x} + c'(x)e^{2x} = -6 \\ -a'(x) + 3c'(x)e^{2x} = 0 \end{array}\right\}$ dají $\left\{\begin{array}{l} a'(x) = 3e^{x} \\ b'(x) = -6e^{x} - 4e^{2x} \\ c'(x) = e^{-x} \end{array}\right\}$, tedy

$\left\{\begin{array}{l} a(x) = 3e^{x} \\ b(x) = -6e^{x} - 2e^{2x} \\ c(x) = -e^{x} \end{array}\right\}$ a $\left\{\begin{array}{l} y_{1p}(x) = 0 \\ y_{2p}(x) = -6 \\ y_{3p}(x) = -6e^{x} \end{array}\right\}$.

Eliminace: Z (#2) $y_1 = y_2' + y_2 + 6$ $(*)$, do (#1) a (#3) dá $\left\{\begin{array}{l} (1^*)\ y_2'' = y_2 + y_3 + 6 + 6e^{x} \\ (2^*)\ y_3' = y_2' + y_2 + y_3 + 6 \end{array}\right\}$, z (#1*) $y_3 = y_2'' - y_2 - 6 - 6e^{x}$ $(\star)$, do (#2*) dá $y_2''' - y_2'' - 2y_2' = -6$. Char. č. $\lambda = 0, -1, 2$, řešení přidružené homogenní $y_h(x) = a + be^{-x} + ce^{2x}$.

Nenulová pravá strana nejlépe odhadem, $k = 1$, proto $y_p = x^1 A = Ax$, dosazení do $y_2''' - y_2'' - 2y_2' = -6$ dá $A = 3$, tedy $y_2(x) = y_p + y_h = 3 + a + be^{-x} + ce^{2x}$, z $(\star)$ máme $y_3(x) = -9 - 6e^{x} - a + 3ce^{2x}$, z $(*)$ máme $y_1(x) = 9 + a + 3ce^{2x}$. Obecné řešení $y_1(x) = 9 + a + 3ce^{2x}$, $y_2(x) = 3 + a + be^{-x} + ce^{2x}$, $y_3(x) = -9 - 6e^{x} - a + 3ce^{2x}$, $x \in I\!R$.