ODR: Řešené příklady—analyzujeme řešení

1. Pro rovnici $y' = \dfrac{x(1-y)}{2x-y^2}$ načrtněte vektorové pole a určete případná stacionární řešení.

2. Pro autonomní rovnici $y' = \dfrac{y(y^2-4)}{1-y}$ načrtněte vektorové pole, určete případná stacionární řešení a rozeberte stabilitu ekvilibrií.

3. Pro rovnici $y' = \dfrac{e^{13y}}{x-23}$ diskutujte existenci a jednoznačnost řešení pomocí Picardovy věty.

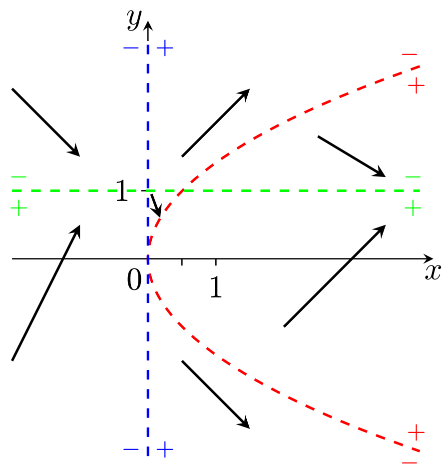
Řešení

1. Znaménko pravé strany $f = \dfrac{x(1-y)}{2x-y^2}$ se může změnit, pokud:

- je rovna nule, což nastane pro $x = 0$ a $y = 1$;
- neexistuje, což nastane pro $2x - y^2 = 0$ neboli $x = \frac{1}{2}y^2$.

Máme tři dělicí křivky, svislou přímku $x = 0$ neboli osu y, vodorovnou přímku $y = 1$ a křivku $x = \frac{1}{2}y^2$, což je parabola s vrcholem $(0,0)$ otevřená doprava (prohozené osy). S přímkou $y = 1$ se protíná v bodě $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

V rovině tak vznikne několik útvarů, u nichž je třeba zjistit znaménko f. Nejjednodušší (a spolehlivá) metoda je v každé oblasti vybrat nějaký bod a dosadit do $f(x,y) = \dfrac{x(1-y)}{2x-y^2}$, čímž je znaménko určeno. Například pro velkou oblast uvnitř paraboly vybereme bod $(2,0)$ a podle $f(2,0) = \frac{1}{2} > 0$ je v této oblasti znaménko kladné, tedy šipkou naznačíme, že tam řešení rostou. Obdobně určíme další oblasti, nezapomeneme na tu malinkatou.
Nebo je možné využít toho, že f se zkládá ze tří násobených a dělených faktorů, je tedy možné určit zvlášť přínos každého z nich ke znaménku a spojit je běžným působem.



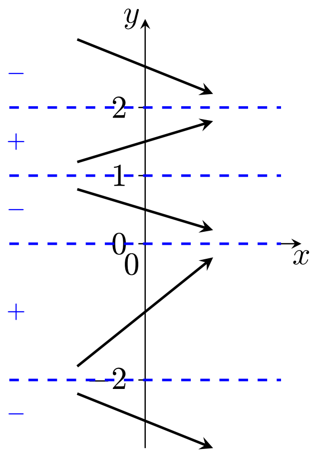
Pro faktor x v čitateli je dělící křivkou osa y, napravo uděluje kladné znaménko, nalevo záporné. Pro faktor $1 - y$ je dělící křivkou přímka $y = 1$, v horní polorovině uděluje záporné znaménko, v dolní kladné. Pro faktor $2x - y^2$ je dělící křivkou parabola $x = \frac{1}{2}y^2$, znaménko uvnitř zjistíme například dosazením do $2x - y^2$, je kladné, vně záporné.

Pak pro každou oblast vyhodnotíme vlivy. Například pro jakoby doprava jdoucí trojúhelník nad přímkou $y = 1$ aplikujeme záporné znaménko z $1 - y$, kladné z x a kladné z $2x - y^2$.

Stacionární řešení vznikají tak, že pro určitou hodnotu y_0 je derivace $y' = f(x,y)$ nulová bez ohledu na x. To zde nastává pro $y_0 = 1$, máme tedy stacionární řešení $y(x) = 1$. Protože rovnice není autonomní (v pravé straně je x), stabilitu neurčujeme.

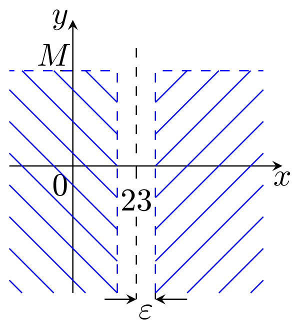
2. U autonomní rovnice stačí vyšetřit vliv y na znaménko, uděláme to tradičním způsobem z kalkulu:
Máme faktory y, y^2-4 a $1-y$, celkem čtyři dělící body.

$$- \quad -2 \quad + \quad 0 \quad - \quad 1 \quad + \quad 2 \quad -$$



Když tuto informaci přeneseme do roviny, získáme vektorové pole.
Stacionární řešení jsou tři, $y(x)=0$ a $y(x)=\pm 2$. Hodnota $y=1$ sice dělí znaménko, ale řešením není.
Máme tři ekvilibria neboli rovnovážné hodnoty, z vektorového pole vidíme, že $y=2$ a $y=0$ jsou stabilní, zatímco $y=-2$ je nestabilní.

3. Použijeme přístup přes derivaci. Najdeme $\frac{\partial f}{\partial y}=13\frac{e^{13y}}{x-23}$ a ptáme se, kde je ohrožena omezenost. Vidíme, že problémy nastávají, pokud $y\to\infty$ a $x\to 23$. Tyto části roviny je tedy třeba odříznout. Abychom udrželi y pryč od nekonečna, omezíme jej na interval $(-\infty,M)$ pro nějaké $M>0$. Pro x je třeba zajistit $|x-23|>\varepsilon$ pro nějaké $\varepsilon>0$, což dává dva možné intervaly.
Uvažujeme tedy obdélníky v $I\!R^2$ typu $(-\infty,23-\varepsilon)\times(-\infty,M)$ a $(23+\varepsilon,\infty)\times(-\infty,M)$ pro $M,\varepsilon>0$. Tvrdíme, že $\frac{\partial f}{\partial y}=13\frac{e^{13y}}{x-23}$ je na nich omezená. A opravdu, uvažujme konkrétní $M,\varepsilon>0$. Pokud leží (x,y) v jednom z odpovídajících dvou obdélníků, pak $y\le M$ a $|x-23|>\varepsilon$.



Víme také, že $e^y>0$ a je to rostoucí funkce, proto

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial y}\Big| = 13e^{13y}\frac{1}{|x-23|}\le 13e^{M}\frac{1}{\varepsilon}.$$

Tato derivace je tedy omezená, proto dle Picardovy věty má daná diferenciální rovnice jednoznačná řešení skrz všechny body množin $(-\infty,23-\varepsilon)\times(-\infty,M)$ a $(23+\varepsilon,\infty)\times(-\infty,M)$ pro $M,\varepsilon>0$.
Nyní začneme tyto oblasti nafukovat pomocí $M\to\infty$ a $\varepsilon\to 0^+$. Je zjevné, že každý bod z roviny $I\!R^2$ vyjma těch ležících na přímce $x=23$ leží v některém z dotyčných obdélníků a tudíž pro něj platí předchozí pozorování.
Závěr: Každým bodem $(x,y)\in I\!R^2$ splňujícím $x\neq 23$ prochází nějaké řešení dané diferenciální rovnice a je jednoznačně určeno.