ODR: Řešené příklady—separabilní rovnice

1. Najděte řešení rovnice $y' = \dfrac{2y}{x-1}$ splňující počáteční podmínku $y(0) = 13$.

2. Najděte obecné řešení rovnice $y' = 3x^2(y-1)^2$.
Pak najděte řešení splňující počáteční podmínku $y(1) = \frac{8}{9}$.

3. Pro rovnici $y' = \dfrac{y^2-1}{2x}$ řešte následující Cauchyho (počáteční) úlohy:

a) $y(1) = 0$; b) $y(5) = -4$; c) $y(1) = 2$; d) $y(0) = 3$; e) $y(-1) = -1$.

4. Pro rovnici $y' = \dfrac{y}{2x} + \dfrac{1}{2xy}$ řešte následující Cauchyho (počáteční) úlohy:

a) $y(2) = -1$; b) $y(0) = 1$; c) $y(-2) = 1$; d) $y(1) = 0$.

Řešení

1. Jako obvykle najdeme nejprve **obecné řešení**. Začneme pozorováním, že máme podmínku $x \neq 1$, na tu musíme myslet.
Rovnice není lineární, tudíž doufáme, že bude separovatelná. Zkusíme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x-1} \implies \frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x-1}.$$

Povedlo se, proto rychle přimalujeme integrační značky, aby to mělo smysl. Zároveň si všimneme, že tento krok funguje pouze pro $y \neq 0$. Teorie říká, že pak je konstantní funkce $y(x) = 0$ stacionárním řešením.
Jdeme dál, integrujeme:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2\,dx}{x-1} \implies \ln|y| = 2\ln|x-1| + C.$$

Vzniklou rovnici chceme řešit pro y. Abychom se zbavili logaritmu nalevo, aplikujeme na obě strany (jako celek, to se týká hlavně pravé strany) exponenciálu:

$$|y| = e^{2\ln|x-1|+C} = e^C \cdot e^{2\ln|x-1|}.$$

Bohužel dvojka zabraňuje exponenciále, aby se zkrátila s logaritmem. Takové situace řešíme algebraicky, buď převodem na $\left(e^{\ln|x-1|}\right)^2$, nebo tak, že dvojku schováme do logaritmu (což se dá provést hned po integraci): $2\ln|x-1| = \ln(|x-1|^2)$. Obojí vede na

$$|y| = e^C|x-1|^2.$$

Pro práci s absolutní hodnotou existuje standardní trik, nahradí se volbou plus či mínus. Nicméně napravo to nepotřebujeme, protože druhá mocnina dává vždy nezáporné číslo. Každopádně máme

$$y = \pm e^C(x-1)^2.$$

Což nás přivádní k druhému triku, který se v této souvislosti často používá. Konstantu C si můžeme volit dle libosti, tedy i číslo e^C si vytváříme dle libosti, ale jen kladné. Ovšem i znaménko je dle libosti, tedy $\pm e^C$ je libovolné nenulové číslo, označíme jej $D = \pm e^C$. Dostáváme

$$y(x) = D(x-1)^2.$$

Toto řešení vzniklo za předpokladu, že $y \neq 0$, což je pro tento vzorec splněno vzhledem k podmínce $x \neq 1$ (viz rovnice) a $D \neq 0$. Je tedy vše v pořádku.
Máme dvě možnosti pro obecné řešení, $y(x) = D(x-1)^2$ s konstantou $D \neq 0$ a stacionární $y(x) = 0$. Někdy se to povede spojit. Zkusíme $D = 0$ v obecném vzorci a opravdu vyjde $y(x) = 0$. Ještě platnost, ze vzorce není omezení, z rovnice je. Závěr: Obecné řešení je

$$y(x) = D(x-1)^2,\ x \neq 1.$$

(Zde už D bez omezení, jak je zvykem u parametrů v obecném řešení.)

Počáteční podmínka: Chceme $y(0) = 13$ neboli $D(0-1)^2 = 13$. Odtud snadno $D = 13$.
Nutno určit interval, podmínka $x \neq 1$ nabízí výběr z $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$. My chceme interval umožňující dosadit počáteční hodnotu $x_0 = 0$ (viz podmínka), tím je volba dána.
Závěr: Hledané řešení je $y(x) = 13(x-1)^2$, $x \in (-\infty, 1)$.

2. Z rovnice neplyne omezení pro x, y. Lze separovat?

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2(y-1)^2 \implies \int (y-1)^{-2} dy = \int 3x^2\, dx.$$

Separace proběhla úspěšně. Měli jsme se ovšem zamyslet, zda je možná (dělení nulou), vidíme omezení $y \neq 1$. Máme stacionární řešení $y(x) = 1$ na $\mathbb{R}$.
Pro $y \neq 1$ integrujeme, $-(y-1)^{-1} = x^3 + C$. Vyřešíme pro y:

$$\frac{1}{y-1} = -C - x^3 \implies y(x) = 1 - \frac{1}{x^3 + C}.$$

Toto vzniklo za předpokladu, že $y \neq 1$, což pro tento vzorec platí, je tedy v pořádku.
Lze zahrnout to stacionární nějakou volbou C? Ne, není možné vybrat C tak, aby pak $1 - \frac{1}{x^3+C} = 1$ vždy. Podmínka existence: Z rovnice nic, z řešení $x^3 + C \neq 0$.
Závěr: obecné řešení je dáno dvěma vzorci, $y(x) = 1 - \frac{1}{x^3+C}$ pro $x^3 \neq -C$ a $y(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{R}$.
Poznámka: Kdo chce, může si konstantu C nahradit konstantou $-C$, dostane pak alternativní vzorec $y(x) = 1 - \frac{1}{x^3-C}$ pro $x^3 \neq C$, což může někomu přijít pěknější.

Počáteční podmínka: Chceme $y(1) = \frac{8}{9}$ neboli $1 - \frac{1}{1^3+C} = \frac{8}{9}$. Vyjde $C = 8$, $y(x) = 1 - \frac{1}{x^3+8}$. Podmínka existence $x^3 \neq -8$ neboli $x \neq -2$. Vznikají dva intervaly, vybereme ten obsahující $x_0 = 1$.
Hledané řešení je $y(x) = 1 - \frac{1}{x^3+8}$, $x \in (-2, \infty)$.

3. Rovnice jde separovat, $y' = \frac{1}{2x} \cdot (y^2 - 1)$, použijeme příslušnou metodu. Vidíme podmínku $x \neq 0$. Nejprve stacionární řešení (ať nedělíme nulou): $y^2 - 1 = 0$ pro hodnoty $1, -1$, proto řešení $y(x) = -1$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ a řešení $y(x) = 1$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.
Pro $y \neq \pm 1$ separujeme a pak integrujeme: $\displaystyle\int \frac{2\,dy}{y^2-1} = \int \frac{dx}{x}$. Pravý integrál je tabulkový, levý je snadno rozkladem na parciální zlomky:

$$\int \frac{2\,dy}{(y-1)(y+1)} = \int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\, dy = \ln|y-1| - \ln|y+1| = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|.$$

Máme rovnici $\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \ln|x| + C$, přechodem na exponenciálu máme

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{\ln|x|+C} = e^C \cdot e^{\ln|x|} = e^C|x|.$$

Trik s absolutní hodnotou dá $\frac{y-1}{y+1} = \pm e^C x$, znaménko schováme do nové konstanty $D = \pm e^C$: $\frac{y-1}{y+1} = Dx$, kde $D \neq 0$. Odtud $y(x) = \frac{1+Dx}{1-Dx}$.
Podmínka separace $y \neq \pm 1$ může nastat jedině pro $x = 0$ (zakázáno) či pro $D = 0$ (zatím není možné), takže vše je v pořádku.
Existence: Z rovnice máme $x \neq 0$. Ze vzorce samotného pak máme $1 - Dx \neq 0$, což má praktický význam jen pro $D \neq 0$, pak $x \neq \frac{1}{D}$. Raději tento rozbor necháme na čtenáři.
Volba $D = 0$ dá jedno ze stacionárních řešení, tak to také zahrneme; druhé zahrnout nejde.
Závěr: Obecné řešení rovnice je $y(x) = \frac{1+Dx}{1-Dx}$ pro $x \neq 0$ a $Dx \neq 1$ (dva nebo tři možné intervaly řešení), nebo $y(x) = -1$ pro $x \neq 0$ (dva možné intervaly řešení).

Poč. podmínky: a) Dosadíme: $\frac{1+D\cdot 1}{1-D\cdot 1} = 0$, tedy $D = -1$. Podmínky jsou teď $x \neq 0$, $x \neq -1$, z toho jsou tři intervaly a my chceme ten, který obsahuje $x_0 = 1$. Řešení je $y_a(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x \in (0, \infty)$.
b) Dosadíme: $\frac{1+5D}{1-5D} = -4$, tedy $D = \frac{1}{3}$. Podmínky jsou teď $x \neq 0$, $x \neq 3$, z toho jsou tři intervaly a my chceme ten, který obsahuje $x_0 = 5$. Řešení je $y_b(x) = \frac{1+\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}} = \frac{3+x}{3-x}$, $x \in (3, \infty)$.
c) Dosadíme: $\frac{1+D}{1-D} = 2$, tedy $D = \frac{1}{3}$. Podmínky jsou teď $x \neq 0$, $x \neq 3$, z toho jsou tři intervaly a my chceme ten, který obsahuje $x_0 = 1$. Řešení je $y_c(x) = \frac{1+\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}} = \frac{3+x}{3-x}$, $x \in (0, 3)$.
Poznámka: Ta řešení z b) a c) mají stejný vzorec, ale jsou různá kvůli intervalu.
d) Protože $x_0 = 0$ nelze dosadit do dané rovnice, řešení $y_d(x)$ neexistuje.
e) Dosadíme: $\frac{1-D}{1+D} = -1$ nemá řešení. Teď se hodí ta stacionární řešení ze začátku, vybereme vhodné: Řešení je $y_e(x) = -1$, $x \in (-\infty, 0)$.

4. Daná rovnice rozhodně není lineární (y ve jmenovateli), jediná šance je tedy zkusit separovat, což naštěstí jde po přechodu na společný jmenovatel:

$$y' = \frac{y^2+1}{2yx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{y^2+1}{2y}.$$

Vidíme podmínky $x \neq 0$, $y \neq 0$, a protože $y^2 + 1$ nelze vynulovat volbou y, nebudou stacionární řešení. Pro $x, y \neq 0$ rozdělíme a integrujeme:

$$\int \frac{2y\,dy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x}.$$

První integrál se hravě udolá substitucí $z = y^2 + 1$, dostaneme $\ln|y^2+1| = \ln|x| + c$, vlevo vidíme logaritmus a absolutní hodnotu, tudíž tušíme trik s $\pm$, tak jsme pro integrační konstantu použili c a později přejdeme k C (psychologický trik, který je možno ignorovat).
Obvyklý postup dá $|y^2+1| = e^{\ln|x|}e^c$ neboli $|y^2+1| = e^c|x|$, trik dá $y^2 + 1 = \pm e^c x = Cx$, kde $C \neq 0$, tedy $y^2 = Cx - 1$ a odtud $y(x) = \pm\sqrt{Cx-1}$ (dvě možnosti pro řešení).
Dá se něco zahrnout volbou $C = 0$? Pak vyjde $y(x) = \pm\sqrt{-1}$, to nemá smysl.
Existence: Z rovnice máme $x \neq 0$ a také $y \neq 0$, tedy $Cx - 1 \neq 0$ neboli $x \neq \frac{1}{C}$ (má smysl, $C \neq 0$). Z řešení podmínka na y není. Ze vzorce samotného máme $Cx - 1 \geq 0$. Význam podmínky záleží na znaménku C, lze spojit s předchozí podmínkou přepisem na $Cx - 1 > 0$.
Závěr: Obecné řešení je $y(x) = \pm\sqrt{Cx-1}$, $x \neq 0$, $Cx - 1 > 0$ pro $C \neq 0$. Výjimečně uděláme rozbor oborů platnosti.
Pokud $C > 0$, vychází $x > \frac{1}{C}$. Protože pak $\frac{1}{C} > 0$, vyloučí se tím zároveň možnost $x = 0$ a podmínku $x \neq 0$ tedy není nutno nějak dále vynucovat. Pokud $C < 0$, vychází $x < \frac{1}{C}$, opět díky $\frac{1}{C} < 0$ rovnou zajistíme splnění $x \neq 0$.
Závěr: Obecné řešení rovnice je $y(x) = \pm\sqrt{Cx-1}$, kde $x \in \left(-\infty, \frac{1}{C}\right)$ pro $C < 0$ a $x \in \left(\frac{1}{C}, \infty\right)$ pro $C > 0$.

Poč. podmínky: a) Zde je třeba volit mínus odmocninu, protože $y_0 = -1 < 0$. Dosadíme: $-\sqrt{2C-1} = -1$, tedy $C = 1$. Řešení: $y_a(x) = -\sqrt{x-1}$, $x \in (1, \infty)$.

b) y_b neexistuje, protože $x_0 = 0$ není možné.
c) Zde je třeba volit plus odmocninu, protože $y_0 > 0$. Dosadíme: $\sqrt{-2C-1} = 1$, tedy $C = -1$. Řešení: $y_c(x) = \sqrt{-x-1}$, $x \in (-\infty, -1)$.
d) y_d neexistuje, protože máme podmínku $y \neq 0$.

Poznámka: $\frac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x}\,\dfrac{y^2+1}{2y}$ je omezená na libovolném omezeném uzavřeném obdélníku $I \times J$ neobsahujícím $x = 0$ a $y = 0$. Proto dostáváme pro libovolnou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ s $x_0, y_0 \neq 0$ jednoznačnost existence řešení.
Možné problémy s $x = 0$ či $y = 0$ byly naštěstí vyloučeny formou rovnice.
Co by se stalo, kdyby ta rovnice byla třeba ve tvaru $2yy' = \dfrac{y^2+1}{x}$? Pak by možnost $y = 0$ vyloučena nebyla, což se u obecného řešení projeví úpravou podmínky existence na $Cx - 1 \geq 0$. Znamenalo by to taky, že by bylo možné mít počáteční podmínky $y(x_0) = 0$, na které se již nevztahuje jednoznačnost z Picardovy věty a musíme být ostražití. Jak by teď dopadlo řešení části d)?
Hned vidíme, že si neumíme vybrat, která ze dvou variant pro $y(x)$ je ta správná, což ukazuje, že budou buď dvě řešení, nebo případně žádné. Dosadíme: $0 = \pm\sqrt{C-1}$, tedy $C = 1$. Dostáváme dvě řešení, $y(x) = \sqrt{x-1}$ a $y(x) = -\sqrt{x-1}$ pro $x \in \langle 1, \infty)$.