ODR: Řešené příklady—lineární diferenciální rovnice

1. Najděte obecné řešení rovnice $y''''' - 2y'''' + 5y''' - 8y'' + 4y' = 0$.
Určete asymptotické chování typického řešení v nekonečnu.

2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 2y = -2x\,e^x + 3e^{-x}$.
Určete asymptotické chování typického řešení v nekonečnu.

3. Pro rovnici $y'' + y' = 4x + 2x\,e^x$ řešte Cauchyho (počáteční) úlohu $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

4. Najděte obecné řešení rovnice $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 2\sin(t) - 25\cos(2t) + 4e^t$.

Řešení

1. Jde o homogenní lineární rovnici s konstantními koeficienty, proto obecné řešení získáme přímo pomocí charakteristických čísel. Máme řešit rovnici

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 5\lambda^3 - 8\lambda^2 + 4\lambda = 0.$$

Nabízí se vytknout λ:

$$\lambda(\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4) = 0.$$

Tím končí metody, začíná hádání. Ve školních příkladech bývají pěkné kořeny, zkusíme dosadit $\lambda = 1$ a vyjde to. Rozložíme:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4) = 0.$$

Tak zkusíme $\lambda = 1$ v kubickém polynomu a zase to vyjde. Vytkneme:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = 0.$$

Konečně máme kvadratický polynom, jehož kořeny už umíme najít.
Takže charakteristická čísla jsou $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ (dvojnásobné) a $\lambda = \pm 2i = 0 \pm 2i$. Fundamentální systém je tedy

$$\{e^{0\cdot x} = 1, e^{1\cdot x}, x\cdot e^{1\cdot x}, e^{0\cdot x}\sin(2\cdot x), e^{0\cdot x}\cos(2\cdot x)\}.$$

Což jsme vlastně nepotřebovali, ale dalo nám to čas ujasnit si, z jakých funkcí poskládáme obecné řešení:

$$y(x) = a + b\,e^x + cx\,e^x + d\sin(2x) + f\cos(2x), \qquad x \in I\!R.$$

Asymptotické chování v nekonečnu? U typického řešení jsou všechny konstanty nenulové, proto stačí mezi členy najít ten dominantní. Hned vidíme, že tam jsou členy jdoucí do nekonečna, proto lze ignorovat část $a + d\sin(2x) + f\cos(2x)$, která je omezená. Rozhoduje se mezi e^x a $x\,e^x$, ten druhý je evidentně dominantní.
Závěr: Pro $x \to \infty$ je $y(x) \sim cx\,e^x$.

2. Jde o nehomogenní lineární ODR 2. řádu, není problém, takže všechna řešení budou na $I\!R$. Začneme přidruženou homogenní rovnicí. Ta má konstantní koeficienty, takže jdeme na charakteristické věci: Charakteristický polynom je $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$, rovnice $p(\lambda) = 0$ dá charakteristická čísla $\lambda = -1, 2$. Fundamentální systém řešení je proto $\{e^{-x}, e^{2x}\}$ a obecné řešení homogenní rovnice je $y_h(x) = ae^{-x} + be^{2x}$, $x \in I\!R$.
Teď je čas na nehomogenní rovnici. Pravá strana je speciální, proto použijeme metodu odhadu. Jde vlastně o součet dvou různých speciálních stran, protože $2x\,e^x$ a $3e^{-x}$ nejdou napsat pomocí jednoho $e^{\alpha x}$.
Začneme s první členem pravé strany. K získání e^x je třeba mít na vstupu e^x, do sinů a kosinů se trefovat nemusíme, zbývá polynom a ten se zobecňuje na polynom stejného stupně: $(Ax + B)e^x$. Toto je základní tvar, je třeba korekce?

Výraz $e^{1\cdot x}$ nemá sinu a kosiny, tudíž je kódován pomocí $\lambda = 1 \pm 0i = 1$. Mezi charakteristickými čísly (viz homogenní rovnice) není $\lambda = 1$, proto není překryv a není korekce (formálně $m = 0$). První člen pravé strany tedy budeme realizovat pomocí odhadu $(Ax+B)e^x$.
Poznámka: Pokud chcete vidět, jak to odpovídá obecné větě, je třeba nejprve výraz zapsat jako

$$2x\,e^x = e^{1\cdot x}(0 + (2x)\cdot 1) = e^{1\cdot x}(0\cdot\sin(0\cdot x) + 2x\cdot\cos(0\cdot x)),$$

pak má parametry $\alpha = 1$, $\beta = 0$, násobnost $\alpha + \beta i = 1$ jako charakteristického čísla je $m = 0$ (tedy bez korekce), nejvyšší stupeň polynomu je $d = 1$ ($2x$ je polynom stupně 1). Podle věty proto existuje řešení ve tvaru

$$y(x) = x^0 e^{1\cdot x}((Cx+D)\sin(0\cdot x) + (Ax+B)\cos(0\cdot x)) = (Ax+B)e^x.$$

Konec poznámky.
Člen $3e^{-x}$ má obdobně základní tvar odhadu $A\,e^{-x}$. Korekce: Popisuje jej $\lambda = -1 \pm 0i = -1$. Toto číslo najdeme i mezi charakteristickými čísly a je tam jednou, proto bude korekce x^1 (formálně $m = 1$). Závěr: odhad pro druhý člen je $y(x) = x^1 C e^{-x} = Cx\,e^{-x}$. Partikulární řešení dané rovnice dostaneme podle principu superpozice sečtením těchto dvou odhadů, tedy hledáme řešení ve tvaru

$$y(x) = (Ax+B)e^x + Cx\,e^{-x}.$$

Dosadíme do levé strany rovnice a dostaneme výstup

$$\begin{aligned}&[(Ax+2A+B)e^x + (Cx-2C)e^{-x}] - [(Ax+A+B)e^x + (-Cx+C)e^{-x}]\\ &\quad - 2[(Ax+B)e^x + Cx\,e^{-x}] = [-2Ax + (A-2B)]e^x + (-3C)e^{-x}.\end{aligned}$$

Chceme, aby se toto rovnalo $-2x\,e^x + 3e^{-x}$, a protože jsou funkce e^x a e^{-x} nezávislé, nemohou si navzájem přispívat. Jinak řečeno, zpracováváme je zvlášť a dostáváme požadavky

$$(-2Ax + A - 2B)e^x = -2x\,e^x, \qquad (-3C)e^{-x} = 3e^{-x}.$$

Odtud

$$\begin{aligned}&-2Ax + (A-2B) = -2x + 0\\ &-3C = 3\end{aligned} \implies \begin{aligned}-2Ax &= -2x\\ A - 2B &= 0\\ C &= -1\end{aligned} \implies A = 1,\ B = \tfrac{1}{2},\ C = -1.$$

Máme tedy partikulární řešení $y_p(x) = \bigl(x + \frac{1}{2}\bigr)e^x - x\,e^{-x}$ a obecné řešení dané $y_p + y_h$:

$$y(x) = \bigl(x + \tfrac{1}{2}\bigr)e^x - x\,e^{-x} + ae^{-x} + be^{2x}, \qquad x \in I\!R.$$

Asymptotické chování v nekonečnu? U typického řešení jsou všechny konstanty nenulové, proto stačí mezi členy najít ten dominantní. Hned vidíme, že tam jsou členy jdoucí do nekonečna, proto lze ignorovat část $ae^{-x} \to 0$ pro $x \to \infty$.
Další zajímavý člen je $xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$. Protože v nekonečnu exponenciály dominují mocninám, máme $\frac{x}{e^x} \to 0$ (kdo nevěří, zkusí l'Hospitala), takže i tento člen je mimo hru. Pro velká x dále máme $x + \frac{1}{2} \sim x$, takže rozhodujeme mezi členy $x\,e^x$ a e^{2x}. Vzájemné porovnání $\frac{e^{2x}}{x\,e^x} = \frac{e^x}{x} \to \infty$ vyznívá ve prospěch e^{2x}, takže máme závěr: Pro $x \to \infty$ je $y(x) \sim b\,e^{2x}$.

Alternativa: Šlo použít i variaci konstant, z $y_h(x)$ dostaneme $y(x) = a(x)e^{-x} + b(x)e^{2x}$, proto máme rovnice

$$\begin{aligned}a'(x)e^{-x} + b'(x)e^{2x} &= 0\\ -a'(x)e^{-x} + 2b'(x)e^{2x} &= -2x\,e^x + 3e^{-x}\end{aligned} \implies \begin{aligned}a'(x) &= \frac{2}{3}x\,e^{2x} - 1\\ b'(x) &= -\frac{2}{3}x\,e^{-x} + e^{-3x}\end{aligned}$$

Odtud per partes dá $a(x) = \frac{1}{3}x\,e^{2x} - \frac{1}{6}e^{2x} - x$, $b(x) = \frac{2}{3}x\,e^{-x} + \frac{2}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{-3x}$, dosazením do variačního odhadu se dostane

$$\begin{aligned}\tilde{y}_p &= \big(\tfrac{1}{3}x\,e^{2x} - \tfrac{1}{6}e^{2x} - x\big)e^{-x} + \big(\tfrac{2}{3}x\,e^{-x} + \tfrac{2}{3}e^{-x} - \tfrac{1}{3}e^{-3x}\big)e^{2x}\\ &= x\,e^{x} + \tfrac{1}{2}e^{x} - x\,e^{-x} - \tfrac{1}{3}e^{-x}.\end{aligned}$$

Pak $y = \tilde{y}_p + y_h$ a jsme hotovi.
Mimochodem, toto $\tilde{y}_p$ se liší od y_p z odhadu, ale rozdíl $\tilde{y}_p - y_p = -\frac{1}{3}e^{-x}$ patří mezi homogenní řešení y_h, takže je to v pořádku.
Podobně se i další úlohy řešené odhadem dají dělat i variací, ale většinou to tak je delší.

3. Jde o nehomogenní lineární ODR 2. řádu, není problém, takže všechna řešení budou na $I\!R$. Začneme přidruženou homogenní rovnicí. Ta má konstantní koeficienty, takže standardní postup: Z rovnice $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1) = 0$ máme charakteristická čísla $\lambda = 0, -1$. Fundamentální systém řešení je proto $\{e^{0\cdot x}, e^{-x}\} = \{1, e^{-x}\}$ a obecné řešení homogenní rovnice je $y_h(x) = a + be^{-x}$, $x \in I\!R$.
Teď je čas na nehomogenní rovnici. Pravá strana je speciální, použijeme metodu odhadu. Jde vlastně o součet dvou různých speciálních stran, protože $4x$ a $2x\,e^{x}$ nejdou zapsat pomocí jednoho $e^{\alpha x}$.
Člen $4x$ nemá ani exponenciálu, ani (ko)síny, takže je nedáváme do vstupu a pouze se trefujeme do polynomu: $Ax+B$. Korekce: Polynom bez exponenciály a (ko)sínů je kódován číslem $\lambda = 0\pm 0i = 0$. Mezi charakteristickými čísly nulu najdeme jako jednonásobnou, tedy bude korekce x^1 ($m=1$). Proto musí existovat řešení ve tvaru

$$y(x) = x^1(Ax+B) = Ax^2 + Bx.$$

Poznámka: Do obecné věty to zapadá takto:

$$4x = e^0(0 + (4x)\cdot 1) = e^{0\cdot x}(0\cdot\sin(0\cdot x) + 4x\cdot\cos(0\cdot x))$$

má parametry $\alpha = 0$, $\beta = 0$, násobnost $\alpha + \beta i = 0$ jako charakteristického čísla je $m = 1$, nejvyšší stupeň polynomu je $d = 1$ ($4x$ je polynom stupně 1). Existuje tedy řešení ve tvaru

$$x^1 e^{0\cdot x}((Cx+D)\sin(0\cdot x) + (Ax+B)\cos(0\cdot x)) = Ax^2 + Bx.$$

Konec poznámky.
Člen $2x\,e^{x}$ má základní tvar odhadu $(Cx+D)e^{x}$. Jeho číslo je $\lambda = 1$, nemáme překryv s charakteristickými čísly a proto je to bez korekce, původní odhad zůstane.
Sečteme, náš odhad tvaru řešení je

$$y(x) = Ax^2 + Bx + (Cx+D)e^{x}.$$

Dosadíme do levé strany rovnice a dostaneme

$$[2A + (Cx + 2C + D)e^{x}] + [(2Ax + B + (Cx + C + D)e^{x}] = [2Ax + (2A+B)] + [2Cx + (3C+2D)]e^{x}.$$

Chceme z toho mít $4x + 2x\,e^{x}$. Protože funkce e^{x} a 1 jsou nezávislé, rovnost nastane, pouze pokud se rovnají jednotlivé části. Máme tedy

$$\begin{matrix}2Ax + (2A+B) = 4x + 0\\ 2Cx + (3C+2D) = 2x + 0\end{matrix} \implies \begin{matrix}2Ax = 4x\\ 2A + B = 0\\ 2Cx = 2x\\ 3C + 2D = 0\end{matrix} \implies A = 2, B = -4,\ C = 1,\ D = -\tfrac{3}{2}.$$

Máme tedy partikulární řešení $y_p(x) = 2x^2 - 4x + \big(x - \frac{3}{2}\big)e^x$ a obecné řešení dané $y_p + y_h$:

$$y(x) = 2x^2 - 4x + \big(x - \tfrac{3}{2}\big)e^x + a + be^{-x}, \qquad x \in I\!R.$$

Poč. podmínky: Máme $y(x) = 2x^2 - 4x + \big(x - \frac{3}{2}\big)e^x + a + be^{-x}$, $y'(x) = 4x - 4 + \big(x - \frac{1}{2}\big)e^x - be^{-x}$; dosadíme podmínky a dostaneme

$$\begin{aligned} -\tfrac{3}{2} + a + b &= \tfrac{1}{2} \\ -4 - \tfrac{1}{2} - b &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned} \implies \begin{aligned} a + b &= 2 \\ b &= -4 \end{aligned} \implies \quad a = 6,\ b = -4.$$

Řešení je $y(x) = 2x^2 - 4x + 6 + \big(x - \frac{3}{2}\big)e^x - 4e^{-x}, \quad x \in I\!R.$

4. Jde o nehomogenní lineární ODR 2. řádu, není problém, takže všechna řešení budou na $I\!R$. Začneme přidruženou homogenní rovnicí. Ta má konstantní koeficienty, standardním postupem najdeme pomocí rovnice $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ charakteristické číslo $\lambda = 1$ ($2\times$). Fundamentální systém řešení je proto $\{e^t, t\,e^t\}$ a obecné řešení homogenní rovnice je $x_h(t) = ae^t + bt\,e^t$, $t \in I\!R$.
Teď je čas na nehomogenní rovnici. Pravá strana je speciální, jde vlastně o součet tří různých speciálních stran, protože $\sin(t)$, $\cos(2t)$ a e^t nejdou vyjádřit jako $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ pro jedno α a β.
Abychom získali člen $2\sin(t)$, není třeba dávat do vstupu exponenciálu, zato tam musíme dát $\sin(t)$ a také druhý člen $\cos(t)$ (vždy chodí při odhadu spolu). Dále je třeba zobecnit polynom 2 nultého stupně. Základní tvar odhadu je proto $A\sin(t) + B\cos(t)$.
Korekce? $2\sin(1\cdot t)$ je kódován číslem $\lambda = 0 \pm 1i = \pm i$. Toto mezi charakteristickými čísly nenajdeme, tedy bez korekce $m = 0$. Základní tvar zůstává.
Poznámka: Podle obecné věty bychom psali $2\sin(t) = e^0(2\sin(1\cdot t) + 0\cos(1\cdot t))$. Tento výraz má parametry $\alpha = 0$, $\beta = 1$, násobnost $\alpha + \beta i = i$ jako charakteristického čísla je $m = 0$, maximální stupeň polynomu je $d = 0$ (2 je polynom stupně 0). Existuje tedy řešení ve tvaru $x(t) = t^0 e^{0\cdot t}(A\sin(1\cdot t) + B\cos(1\cdot t)) = A\sin(t) + B\cos(t)$. Konec poznámky.
Člen $-25\cos(2t)$ se rozebere obdobně, základní tvar je $C\sin(2t) + D\cos(2t)$, a protože $\lambda = \pm 2i$ není mezi charakteristickými čísly, je to bez korekce.
Třetí člen e^t má základní tvar řešení odhadnut jako $E\,e^t$, protože je před ním schován polynom stupně nula, $e^t = 1\cdot e^t$, který je třeba zobecnit. Korekce: e^t odpovídá $\lambda = 1$, která je také dvojnásobných charakteristickým číslem. Bude proto dvojitá korekce ($m = 2$) a odhadneme tvar řešení jako $t^2 E e^t = Et^2 e^t$.
Sečteme všechny součásti odhadu, takže hledáme řešení ve tvaru

$$x(t) = A\sin(t) + B\cos(t) + C\sin(2t) + D\cos(2t) + Et^2e^t.$$

Dosadíme do levé strany rovnice a dostaneme

$$\begin{aligned} &[-A\sin(t) - B\cos(t) - 4C\sin(2t) - 4D\cos(2t) + 2Ee^t + 4Ete^t + Et^2e^t] \\ &\qquad - 2[A\cos(t) - B\sin(t) + 2C\cos(2t) - 2D\sin(2t) + 2Ete^t + Et^2e^t] \\ &\qquad + [A\sin(t) + B\cos(t) + C\sin(2t) + D\cos(2t) + Et^2e^t] \\ &= 2B\sin(t) - 2A\cos(t) + [4D - 3C]\sin(2t) + [-4C - 3D]\cos(2t) + 2Ee^t. \end{aligned}$$

Chceme, aby se to rovnalo $2\sin(t) - 25\cos(t) + 4e^t$. Díky nezávoslosti porovnáváme po jednotlivých členech a dostáváme rovnice $2B = 2$, $-2A = 0$, $-3C + 4D = 0$, $-4C - 3D = -25$, $2E = 4$, odtud $A = 0$, $B = 1$, $C = 4$, $D = 3$, $E = 2$.
Máme tedy partikulární řešení $x_p(t) = \cos(t) + 4\sin(2t) + 3\cos(2t) + 2t^2e^t$ a obecné řešení dané vzorcem $x_p + x_h$:

$$x(t) = \cos(t) + 4\sin(2t) + 3\cos(2t) + 2t^2e^t + ae^t + bt\,e^t, \qquad t \in I\!R.$$