ODR: Řešené příklady—metoda variace

1. Pro rovnici $y' + \frac{x^2}{x^3-1}y = 4\sqrt[3]{(x^3-1)^2}$ řešte následující Cauchyho (počáteční) úlohy:

a) $y(0)=-1$; b) $y(1)=3$; c) $y(2)=\frac{8}{\sqrt[3]{7}}$.

2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení

1. Jde o nehomogenní lineární ODR, takže začneme přidruženou homogenní:

$$y' + \frac{x^2}{x^3-1}y = 0.$$

Nemá konstantní koeficienty, takže nelze použít charakteristická čísla λ. Naštěstí je možné jít cestou separace.
Máme podmínku $x \neq 1$. Stac. řeš. $y(x)=0$, pro $y \neq 0$ separujeme a integrujeme:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx.$$

Druhý integrál se udělá substitucí $z = x^3-1$, dostaneme $\ln|y| = -\frac{1}{3}\ln|x^3-1| + c = \ln\Big|\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}\Big| + c$, $|y| = e^c\Big|\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}\Big|$, trik $y = \pm e^c \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$, tedy obecné řešení homogenní rovnice je $y_h(x) = \frac{C}{\sqrt[3]{x^3-1}}$, $x \neq 1$. Zde $C \neq 0$, ale $C=0$ dá stacionární řešení $y(x)=0$, $x\neq 1$.

Nyní uděláme variaci konstanty: $y(x) = \frac{C(x)}{\sqrt[3]{x^3-1}}$. Můžeme dosadit do rovnice a zkrátit:

$$\begin{aligned}
&\Big[\frac{C(x)}{\sqrt[3]{x^3-1}}\Big]' + \frac{x^2}{x^3-1}\cdot\frac{C(x)}{\sqrt[3]{x^3-1}} = 4\sqrt[3]{(x^3-1)^2}\\
&\implies C'(x)\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}} + C(x)\frac{-x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^4}} + \frac{x^2}{x^3-1}\cdot\frac{C(x)}{\sqrt[3]{x^3-1}} = 4\sqrt[3]{(x^3-1)^2}\\
&\implies C'(x)\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}} - C(x)\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^4}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^4}}\cdot C(x) = 4\sqrt[3]{(x^3-1)^2}\\
&\implies C'(x)\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}} = 4\sqrt[3]{(x^3-1)^2}.
\end{aligned}$$

Nebo si prostě pamatujeme, že stejný výraz jako pro $y(x)$ ale se zderivovaným $C(x)$ se rovná pravé straně:

$$\frac{C'(x)}{\sqrt[3]{x^3-1}} = 4\sqrt[3]{(x^3-1)^2}.$$

Každopádně máme rovnici k řešení:

$$C'(x) = 4(x^3-1) \implies C(x) = x^4 - 4x.$$

Odtud $y_p(x) = \frac{x^4-4x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$. Pomocí $y = y_p + y_h$ dostaneme obecné řešení:

$$y(x) = \frac{x^4-4x+C}{\sqrt[3]{x^3-1}},\ x \neq 1.$$

Alternativa: $C(x) = x^4 - 4x + C$, pak po dosazení rovnou vyjde obecné řešení.

Poč. podmínky: a) Dosadíme: $\frac{C}{-1} = -1$, tedy $C = 1$, dále $x_0 = 0$ musí ležet v intervalu daném podmínkou $x \neq 1$. Řešení: $y_a(x) = \dfrac{x^4 - 4x + 1}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$, $x \in (-\infty, 1)$.

b) y_b neexistuje, nelze mít $x_0 = 1$.

c) Dosadíme: $\frac{8+C}{\sqrt[3]{7}} = \frac{8}{\sqrt[3]{7}}$, tedy $C = 0$. Řešení: $y_c(x) = \dfrac{x^4 - 4x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$, $x \in (1, \infty)$.

2. Jde o nehomogenní lineární ODR 2. řádu, existence řešení je určena spojitostí koeficientů a pravé strany, takže bude řešení na $(-1, 1)$. Začneme přidruženou homogenní. Ta má konstantní koeficienty, takže klasika: z rovnice $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ máme charakteristické číslo $\lambda = 1$ $(2\times)$. Fundamentální systém řešení je proto $\{e^x, x\,e^x\}$ a obecné řešení homogenní rovnice je $y_h(x) = ae^x + bx\,e^x$, $x \in I\!R$.

Teď je čas na nehomogenní rovnici. Pravé strana není speciální, musíme tedy dělat variaci konstant. Vidíme podmínku $|x| < 1$. Máme $y(x) = a(x)e^x + b(x)x\,e^x$, odtud rovnice

$$\begin{aligned} a'(x)e^x + b'(x)x\,e^x &= 0 \\ a'(x)e^x + b'(x)(x+1)e^x &= \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} a'(x) + b'(x)x &= 0 \\ a'(x) + b'(x)(x+1) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}.$$

Odečtením (#2)−(#1) získáme $b'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, tedy $b(x) = \arcsin(x)$. Zpětným dosazením do první rovnice máme $a'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, tentokráte se integruje substitucí $z = 1 - x^2$, proto vyjde $a(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Soustava se dá řešit i Cramerovým pravidlem (determinanty):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = 1, \quad D_{a'} = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x+1 \end{vmatrix} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D_{b'} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pak $a'(x) = \frac{D_{a'}}{D}$ a $b'(x) = \frac{D_{b'}}{D}$ a jsme tam, kde jsme byli.

Každopádně dostáváme partikulární řešení $y_p(x) = \sqrt{1-x^2}\,e^x + \arcsin(x)\,x\,e^x$ a obecné řešení sečtením partikulárního a homogenního:

$$y(x) = \sqrt{1-x^2}\,e^x + \arcsin(x)\,x\,e^x + ae^x + bx\,e^x, \qquad x \in (-1, 1).$$

Tohle jsme také mohli dostat tak, že jsme rovnou dávali konstanty při integraci $a(x) = \sqrt{1-x^2} + a$, $b(x) = \arcsin(x) + b$.