## ODR: Řešené příklady—soustavy rovnic

Pro následující příklady je primární metodou přístup přes matice. Kdo chce, může si pro zábavu vyzkoušet i eliminaci.

**1.** Pro soustavu rovnic $\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 \end{aligned}$ a) najděte fundamentální matici;

b) řešte Cauchyho (počáteční) úlohu $y_1(0) = 3$, $y_2(0) = 0$;

c) určete stabilitu triviálního stacionárního řešení $y_1(x) = y_2(x) = 0$.

**2.** Najděte řešení soustavy $\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - y_2 \\ y_2' &= 4y_1 \end{aligned}$ splňující $y_1(1) = 3e^2$, $y_2(1) = 4e^2$.

Určete stabilitu triviálního stacionárního řešení $y_1(x) = y_2(x) = 0$.

**3.** Pro soustavu rovnic $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 + 2 \\ y_2' &= -6y_1 + y_2 - 5e^{-x} \end{aligned}$ najděte obecné řešení.

**4. (drsné)** Pro soustavu rovnic $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 - x_2 - 6\sin^2(t) \end{aligned}$ najděte obecné řešení.

### Řešení

**1. Metoda vlastních čísel**: Soustava je homogenní, proto řešení najdeme přímo z vlastních čísel. Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vlastní čísla: řešíme rovnici

$$0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-1-\lambda) - 2 = (\lambda+2)(\lambda+1) - 2 = \lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda+3),$$

a vlastní čísla jsou $\lambda = 0, -3$. Najdeme vlastní vektory:

$\underline{\lambda = 0}$: $\begin{pmatrix} -2-0 & 1 \\ 2 & -1-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Obě rovnice jsou stejné, tedy stačí řešit první rovnici $-2v_1 + v_2 = 0$, chceme $\vec{v} \neq \vec{0}$, proto volíme nenulově, třeba $v_1 = 1$, pak $v_2 = 2$. Máme řešení $\vec{y}_a(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{0x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda = -3}$: $\begin{pmatrix} -2-(-3) & 1 \\ 2 & -1-(-3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tedy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zase stačí řešit první rovnici $v_1 + v_2 = 0$, chceme $\vec{v} \neq \vec{0}$, proto volíme nenulově, třeba $v_1 = 1$, pak $v_2 = -1$. Máme řešení $\vec{y}_b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3x} = \begin{pmatrix} e^{-3x} \\ -e^{-3x} \end{pmatrix}$.

Fundamentální matice je proto $Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-3x} \\ 2 & -e^{-3x} \end{pmatrix}$.

Obecné řešení je

$$\vec{y}(x) = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} e^{-3x} \\ -e^{-3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + be^{-3x} \\ 2a - be^{-3x} \end{pmatrix}, \quad x \in I\!R.$$

Protože úloha nebyla zadána maticově, hodí se spíše toto vyjádření:

$$y_1(x) = a + be^{-3x},\ y_2(x) = 2a - be^{-3x}, \quad x \in I\!R.$$

Typické řešení $\vec{y}$ zjevně nejde v nekonečnu k $\vec{0}$, takže usoudíme, že $y_1(x) = y_2(x) = 0$ je nestabilní stacionární řešení, neboli že $(0,0)$ je nestabilní rovnovážný bod. Potvrdí to věta o stabilitě, není pravda, že by všechna vlastní čísla byla záporná (měla záporné reálné části).

Bonus: Protože je jedno z reálných vlastních čísel nulové a druhé kladné, není to jeden ze šesti základních typů.

**Poč. podmínky**: Přepíšeme je pomocí obecného řešení a dostaneme

$$\begin{aligned} a+b\cdot 1&=3\\ 2a-b\cdot 1&=0 \end{aligned} \implies a=1,\ b=2.$$

Řešení je $y_1(x)=1+2e^{-3x}$, $y_2(x)=2-2e^{-3x}$ pro $x\in I\!R$.
Kdo chce, píše $\vec{y}(x)=\begin{pmatrix}1+2e^{-3x}\\ 2-2e^{-3x}\end{pmatrix}$, $x\in I\!R$.

Alternativa: **Metoda eliminační**: Z první rovnice vyjádříme $y_2=y_1'+2y_1\quad(*)$ a dosadíme do druhé: $y_1''+3y_1'=0$. Tuto homogenní rovnici s konstantními koeficienty řešíme přes charakteristické věci: Z rovnice $\lambda^2+3\lambda=0$, dostaneme char. čísla $\lambda=0,-3$, obecné řešení $y_1(x)=a+be^{-3x}$. Toto dosadíme do $(*)$ a vyjde $y_2(x)=2a-be^{-3x}$, máme obecné řešení. Pak vyřešíme počáteční podmínky.
Řešení je možné přepsat jako

$$\vec{y}(x)=\begin{pmatrix}a+be^{-3x}\\ 2a-be^{-3x}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}e^{-3x}\\ -e^{-3x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & e^{-3x}\\ 2 & -e^{-3x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\quad x\in I\!R.$$

Vidíme, že fundamentální matice soustavy je $Y(x)=\begin{pmatrix}1 & e^{-3x}\\ 2 & -e^{-3x}\end{pmatrix}$.

**2. Metoda vlastních čísel**: Soustava je homogenní, její matice je $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$. Vlastní čísla: řešíme rovnici

$$0=\begin{vmatrix}4-\lambda & -1\\ 4 & -\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(-\lambda)+4=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2,\qquad \text{vlastní číslo je } \lambda=2\ (2\times).$$

$\underline{\lambda=2}$: $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, stačí řešit $2v_1-v_2=0$, volíme $v_1=1$, tedy $v_2=2$. Máme řešení $\vec{y}_a(x)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{2x}=\begin{pmatrix}e^{2x}\\ 2e^{2x}\end{pmatrix}$. Pro dvojnásobné vlastní číslo máme speciální postup, jak najít druhé řešení do báze.
Řešíme rovnici $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, stačí řešit první rovnici $2v_1-v_2=1$, teď pro $\vec{v}\neq\vec{0}$ můžeme volit $v_1=0$, pak $v_2=-1$. Máme řešení

$$\vec{y}_b(x)=\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right]e^{2x}=\begin{pmatrix}x\,e^{2x}\\ (2x-1)e^{2x}\end{pmatrix}.$$

Obecné řešení je

$$\vec{y}(x)=a\begin{pmatrix}e^{2x}\\ 2e^{2x}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}x\,e^{2x}\\ (2x-1)e^{2x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae^{2x}+bx\,e^{2x}\\ 2ae^{2x}+b(2x-1)e^{2x}\end{pmatrix},\quad x\in I\!R$$

neboli $y_1(x)=ae^{2x}+bx\,e^{2x}$, $y_2(x)=2ae^{2x}+b(2x-1)e^{2x}$ pro $x\in I\!R$.

**Poč. podmínky**: Přepíšeme je pomocí obecného řešení a dostaneme

$$\begin{aligned} ae^2+be^2&=3e^2\\ 2ae^2+be^2&=4e^2 \end{aligned} \implies a=1,\ b=2,$$

řešení je $y_1(x) = (2x+1)e^{2x}$, $y_2(x) = 4x\,e^{2x}$, $x \in I\!R$.
Protože není pravda, že by všechna vlastní čísla byla záporná (měla záporné reálné části), podle věty je $y_1(x) = y_2(x) = 0$ nestabilní stacionární řešení neboli $(0,0)$ je nestabilní rovnovážný bod. Konec konců, je vidět, že typické řešení nejde do počátku.
Bonus: Je to nestabilní uzel.

Alternativa: **Metoda eliminační**: Z první rovnice vyjádříme $y_2 = 4y_1 - y_1' \quad (*)$ a dosadíme do druhé: $y_1'' - 4y_1' + 4y_1 = 0$. Homogenní rovnice s konst. koeficienty, klasický postup získá z rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 = 0$ char. číslo $\lambda = 2$ $(2\times)$ a tedy obecné řešení $y_1(x) = ae^{2x} + bx\,e^{2x}$. Dosazením do $(*)$ dostaneme $y_2(x) = 2ae^{2x} + b(2x-1)e^{2x}$. Počáteční podmínky následují.
Poznámka: Tato řešení jsou dána stejnými vektory báze jako u přístupu přes vlastní čísla:

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} ae^{2x} + bx\,e^{2x} \\ 2ae^{2x} + b(2x-1)e^{2x} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} x\,e^{2x} \\ (2x-1)e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Je náhoda. Kdybychom například u druhého vektoru z vlastních čísel volili $v_1 = 1$, dostali bychom $v_2 = 1$, a tedy

$$\vec{y}(x) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] e^{2x} = \begin{pmatrix} (x+1)\,e^{2x} \\ (2x+1)e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Tento vektor je ale kombinací těch vektorů z eliminace (zde konkrétně jejich součet), naopak ten druhý vektor z eliminace je kombinace $\vec{y} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} (x+1)\,e^{2x} \\ (2x+1)e^{2x} \end{pmatrix}$. Tato nová dvojice tedy dává stejný prostor a vše je v pořádku. Závěr: Vyjdou-li z eliminace a z vlastních čísel různé vektory, neznamená to automaticky, že se někde stala chyba; musíme ale ověřit, že vektory z jedné báze lze dostat pomocí vektorů z druhé a naopak.

**3. Metoda vlastních čísel**: Nejprve homogenní rovnici. Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$, odtud klasicky

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1), \qquad \text{vlastní čísla jsou } \lambda = -1, 4.$$

$\underline{\lambda = -1}$: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, stačí řešit $3v_1 - v_2 = 0$, volíme $v_1 = 1$, tedy $v_2 = 3$, máme řešení $\vec{y}_a(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-x} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 3e^{-x} \end{pmatrix}$.
$\underline{\lambda = 4}$: $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, stačí řešit $-2v_1 - v_2 = 0$, volíme $v_1 = 1$, tedy $v_2 = -2$, máme řešení $\vec{y}_b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{4x} = \begin{pmatrix} e^{4x} \\ -2e^{4x} \end{pmatrix}$.
Dostáváme obecné řešení homogenní rovnice $\vec{y}_h(x) = \begin{pmatrix} ae^{-x} + be^{4x} \\ 3ae^{-x} - 2be^{4x} \end{pmatrix}$, $x \in I\!R$.
Mimochodem, protože není pravda, že by všechna vlastní čísla byla záporná (měla záporné reálné části), podle věty je $y_1(x) = y_2(x) = 0$ nestabilní stacionární řešení neboli $(0,0)$ je nestabilní rovnovážný bod této homogenní soustavy.
Bonus: Je to sedlo.

Pravá strana: Nabízí se metoda odhadu. Vidíme člen 2 s $\lambda = 0$ (bez korekce) a člen $5e^{-x}$ s $\lambda = -1$, tady je překryv. Speciální pravidlo pro soustavy říká, že obě funkce v odhadu řešení musí obsahovat všechny tvary z pravých stran a s korekcemi od nulové k té správné. Proto odhadujeme

$y_1(x) = A + Bx\,e^{-x} + C\,e^{-x}$ a $y_2(x) = D + Ex\,e^{-x} + F\,e^{-x}$. Dosadíme do soustavy:

$$\begin{gathered}
[A + Bx\,e^{-x} + Ce^{-x}]' = 2(A + Bx\,e^{-x} + Ce^{-x}) - (D + Ex\,e^{-x} + Fe^{-x}) + 2\\
[D + Ex\,e^{-x} + Fe^{-x}]' = -6(A + Bx\,e^{-x} + Ce^{-x}) + (D + Ex\,e^{-x} + Fe^{-x}) - 5e^{-x}\\
\Longrightarrow \begin{array}{l}(-2A + D) + (-3B + E)x\,e^{-x} + (B - 3C + F)e^{-x} = 2\\ (6A - D) + (6B - 2E)x\,e^{-x} + (6C + E - 2F)e^{-x} = -5e^{-x}\end{array}
\end{gathered}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
-2A + D &= 2\\
-3B + E &= 0\\
B - 3C + F &= 0\\
6A - D &= 0\\
6B - 2E &= 0\\
6C + E - 2F &= -5
\end{aligned}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\\
D &= 3\\
E &= 3B\\
B - 3C + F &= 0\\
3B + 6C - 2F &= -5
\end{aligned}$$

Soustava je zajímavá, protože dvě rovnice pro $B, E$ jsou vlastně jedna, tedy máme pět rovnic na šest neznámých. Nicméně zrovna $B$ či $E$ si nelze volit libovolně, například přirozená volba $B = E = 0$ by vedla k tomu, že poslední dvě rovnice by byly neřešitelné. Zrovna z nich vyjde $B = -1$, $E = -3$ a ukáže se, že volit si můžeme jednu z konstant $C, F$. Zvolíme $C = -1$, pak $F = -2$ a máme $\vec{y}_p(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - x\,e^{-x} - e^{-x}\\ 3 - 3x\,e^{-x} - 2e^{-x}\end{pmatrix}$. Vzorec $\vec{y} = \vec{y}_p + \vec{y}_h$ pak dá obecné řešení:

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - x\,e^{-x} - e^{-x} + ae^{-x} + be^{4x}\\ 3 - 3x\,e^{-x} - 2e^{-x} + a3e^{-x} - 2be^{4x}\end{pmatrix}, \quad x \in I\!R.$$

Jako obvykle preferujeme zápis ve tvaru zadání, tedy $y_1(x) = \frac{1}{2} - e^{-x} - x\,e^{-x} + ae^{-x} + be^{4x}$, $y_2(x) = 3 - 2e^{-x} - 3x\,e^{-x} + a3e^{-x} - 2be^{4x}$ pro $x \in I\!R$.

Alternativa: Je možné použít metodu variace, a to maticovou či řádkovou.

Maticová forma: Homogenní řešení je $\vec{y}_h(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{4x}\\ 3e^{-x} & -2e^{4x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}$.

Variace: $\vec{y}_p(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{4x}\\ 3e^{-x} & -2e^{4x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(x)\\ b(x)\end{pmatrix}$. Dosazení do soustavy vede na maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{4x}\\ 3e^{-x} & -2e^{4x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'(x)\\ b'(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ -5e^{-x}\end{pmatrix}.$$

Potřebujeme najít inverzní matici k fundamentální matici $Y(x)$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} e^{-x} & e^{4x} & 1 & 0\\ 3e^{-x} & -2e^{4x} & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5}e^{x} & \frac{1}{5}e^{x}\\ 0 & 1 & \frac{3}{5}e^{-4x} & -\frac{1}{5}e^{-4x}\end{array}\right).$$

Máme $\begin{pmatrix} a'(x)\\ b'(x)\end{pmatrix} = Y(x)^{-1}\begin{pmatrix} 2\\ -5e^{-x}\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{x} & e^{x}\\ 3e^{-4x} & -e^{-4x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\ -5e^{-x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{x} - 1\\ \frac{6}{5}e^{-4x} + e^{-5x}\end{pmatrix}$, proto

$$\begin{pmatrix} a(x)\\ b(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \frac{4}{5}e^{x} - 1\,dx\\ \int \frac{6}{5}e^{-5x} + e^{-5x}dx\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{x} - x\\ -\frac{3}{10}e^{-4x} - \frac{1}{5}e^{-5x}\end{pmatrix}.$$

Dosazením máme

$$\vec{y}_p = Y(x)\begin{pmatrix} a(x)\\ b(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{4x}\\ 3e^{-x} & -2e^{4x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{x} - x\\ -\frac{3}{10}e^{-4x} - \frac{1}{5}e^{-5x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - x\,e^{-x} - \frac{1}{5}e^{-x}\\ \\ 3 - 3x\,e^{-x} + \frac{2}{5}e^{-x}\end{pmatrix}.$$

Máme $\vec{y}_p$ i $\vec{y}_h$, takže obecné řešení je $\vec{y} = \vec{y}_p + \vec{y}_h$.
Partikulární řešení $\vec{y}_p$ z variace se liší od toho z metody odhadu. Pokud jsou obě správně, měly by se lišit o vektor z prostoru homogenních řešení:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - x\,e^{-x} - \frac{1}{5}e^{-x} \\ \\ 3 - 3x\,e^{-x} + \frac{2}{5}e^{-x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - e^{-x} - x\,e^{-x} \\ 3 - 2e^{-x} - 3x\,e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{-x} \\ \frac{12}{5}e^{-x} \end{pmatrix} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} e^{-x} \\ 3e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Vyšlo to. Správnost je vidět i jinak. Obecné řešení obdržené metodou odhadu má v sobě libovolně volitelné parametry $a, b$. Můžeme tedy místo $a$ použít $a + \frac{4}{5}$ a dostaneme nové rovnocenné vyjádření pro obecné řešení:

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - e^{-x} - x\,e^{-x} + (a + \frac{4}{5})e^{-x} + be^{4x} \\ 3 - 2e^{-x} - 3x\,e^{-x} + (a + \frac{4}{5})3e^{-x} - 2be^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-x} - x\,e^{-x} + ae^{-x} + be^{4x} \\ 3 + \frac{2}{5}e^{-x} - 3x\,e^{-x} + ae^{-x} - 2be^{4x} \end{pmatrix}.$$

Zde již partikulární vektor odpovídá tomu z variace.

Řádková forma: Z homogenního řešení pomocí variace uhodneme tvar partikulárního řešení: $y_1(x) = a(x)e^{-x} + b(x)e^{4x}$, $y_2(x) = 3a(x)e^{-x} - 2b(x)e^{4x}$. Dosadíme do soustavy:

$$\begin{aligned} &[a(x)e^{-x} + b(x)e^{4x}]' = 2(a(x)e^{-x} + b(x)e^{4x}) - (3a(x)e^{-x} - 2b(x)e^{4x}) + 2 \\ &[3a(x)e^{-x} - 2b(x)e^{4x}]' = -6(a(x)e^{-x} + b(x)e^{4x}) + (3a(x)e^{-x} - 2b(x)e^{4x}) - 5e^{-x} \\ &\qquad\Longrightarrow \quad \begin{aligned} &a'(x)e^{-x} + b'(x)e^{4x} = 2 \\ &3a'(x)e^{-x} - 2b'(x)e^{4x} = -5e^{-x} \end{aligned} \end{aligned}$$

Soustavu snadno vyřešíme řádkovými úpravami či třeba Cramerovým pravidlem, dostaneme $a'(x) = \frac{4}{5}e^{x} - 1$ a $b'(x) = \frac{6}{5}e^{-4x} + e^{-5x}$.
Integrujeme, vzniklé funkce $a(x) = \frac{4}{5}e^{x} - x$, $b(x) = -\frac{3}{10}e^{-4x} - \frac{1}{5}e^{-5x}$ dosadíme do $y_1$ a $y_2$ a máme partikulární řešení $y_{1p}(x) = \frac{1}{2} - x\,e^{-x} - \frac{1}{5}e^{-x}$, $y_{2p}(x) = 3 - 3x\,e^{-x} + \frac{2}{5}e^{-x}$ jako u maticové variace.

Alternativa: **Metoda eliminační**: Z první rovnice vyjádříme $y_2 = 2y_1 - y_1' + 2 \quad (*)$ a dosadíme do druhé: $y_1'' - 3y_1' - 4y_1 = 5e^{-x} - 2$. Nehomogenní lineární rovnice, nejprve řešíme homogenní, s konstantními koeficienty, proto $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$ vede na char. čísla $\lambda = -1, 4$.
Máme řešení $y_h(x) = ae^{-x} + be^{4x}$ homogenní rovnice, teď musíme řešit nehomogenní. Vypadá to na speciální pravou stranu, přesněji řečeno na kombinaci dvou typů, jeden je $5e^{-x}$ s řešením $x\,A\,e^{-x}$ (parametr $\lambda = -1$ má násobnost $m = 1$) a druhý je $-2$ s řešením $B$ (parametr $\lambda = 0$ má násobnost $m = 0$, bez korekce), proto hledáme řešení tvaru $y(x) = Ax\,e^{-x} + B$. Dosadíme do rovnice a dostaneme

$$[(Ax - 2A)e^{-x}] - 3[(-Ax + A)e^{-x}] - 4[Ax\,e^{-x} + B] = 5e^{-x} - 2 \implies -5Ae^{-x} - 4B = 5e^{-x} - 2.$$

Máme $A = -1$, $B = \frac{1}{2}$, proto $y_p(x) = -x\,e^{-x} + \frac{1}{2}$, $y_1(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{1}{2} - x\,e^{-x} + ae^{-x} + be^{4x}$.
Dosazením do $(*)$ dostaneme $y_2 = 3 + (1 - 3x)e^{-x} + 3ae^{-x} - 2be^{4x}$. Závěr:
Obecné řešení je
$y_1(x) = \frac{1}{2} - x\,e^{-x} + ae^{-x} + be^{4x}$, $y_2 = 3 + (1 - 3x)e^{-x} + 3ae^{-x} - 2be^{4x}$, $x \in I\!R$.
Opět je možné porovnat s řešením z variace či metody odhadu, partikulární složka se zde zase liší o vektor z homogenního řešení.

**4. Metoda vlastních čísel**: Nejprve řešíme homogenní rovnici, matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 5 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 5 = \lambda^2 + 4, \qquad \text{vlastní čísla jsou} \quad \lambda = \pm 2i.$$

$\underline{\lambda = 2i}$: $\begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, stačí řešit $(1-2i)v_1 - v_2 = 0$, volíme $v_1 = 1$, tedy $v_2 = 1-2i$, máme řešení

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{2it} = \begin{pmatrix} \cos(2t) + i\sin(2t) \\ (1-2i)[\cos(2t) + i\sin(2t)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2t) + i\sin(2t) \\ [\cos(2t) + 2\sin(2t)] + i[\sin(2t) - 2\cos(2t)] \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dvě řešení do báze získáme jako reálnou a imaginární část $\vec{x}$, tedy

$$\vec{x}_a(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\sin(2t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_b(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Obecné (homogenní) řešení je tedy

$$\vec{x}_h(t) = \begin{pmatrix} a\cos(2t) + b\sin(2t) \\ a[\cos(2t) + 2\sin(2t)] + b[\sin(2t) - 2\cos(2t)] \end{pmatrix}$$

neboli $x_{1h}(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$, $x_{2h}(t) = a[\cos(2t) + 2\sin(2t)] + b[\sin(2t) - 2\cos(2t)]$, $t \in I\!R$.
Partikulární řešení: Pravá strana obsahuje člen $\sin^2(t)$, který není možné získat metodou odhadu. Zbývá tedy variace, uděláme řádkovou verzi:

$$\begin{aligned} x_{1p}(t) &= a(t)\cos(2t) + b(t)\sin(2t), \\ x_{2p}(t) &= a(t)[\cos(2t) + 2\sin(2t)] + b(t)[\sin(2t) - 2\cos(2t)]. \end{aligned}$$

Dosadíme do soustavy a dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} a'(t)\cos(2t) + b'(t)\sin(2t) &= 0 \\ a'(t)[\cos(2t) + 2\sin(2t)] + b'(t)[\sin(2t) - 2\cos(2t)] &= -6\sin^2(t) \end{aligned}$$

Tady asi bude opravdu nejlepší Cramerovo pravidlo:

$$\begin{aligned} D &= \det\begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ \cos(2t) + 2\sin(2t) & \sin(2t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix} = -2\cos^2(2t)] - 2\sin^2(2t) = -2, \\ D_a &= \det\begin{pmatrix} 0 & \sin(2t) \\ -6\sin^2(t) & \sin(2t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix} = 6\sin^2(t)\sin(2t), \\ D_b &= \det\begin{pmatrix} \cos(2t) & 0 \\ \cos(2t) + 2\sin(2t) & -6\sin^2(t) \end{pmatrix} = -6\sin^2(t)\cos(2t). \end{aligned}$$

Dostáváme $a'(t) = -3\sin^2(t)\sin(2t)$, $b'(t) = 3\sin^2(t)\cos(2t)$. Je třeba integrovat, integrály tohoto typu je nejlépe udolat identitami. Jsou v zásadě dvě možnosti. Jedna je zbavit se dvojitého argumentu: $a'(t) = -3\sin^2(t)2\sin(t)\cos(t)$, zde je integrace snadná substitucí a vede na $a(t) = -\frac{3}{2}\sin^4(t)$. Bohužel u $b'(t)$ tento přístup vede na obtížný integrál, tam je lepší vyměnit druhou mocninu u sinu za zdvojení argumentu:

$$\begin{aligned} b(t) &= \int 3\sin^2(t)\cos(2t)dt = \int \tfrac{3}{2}[1 - \cos(2t)]\cos(2t)dt = \int \tfrac{3}{2}[\cos(2t) - \cos^2(2t)]dt \\ &= \int \tfrac{3}{2}\cos(2t) - \tfrac{3}{4}[1 + \cos(4t)]dt = \int \tfrac{3}{2}\cos(2t) - \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4}\cos(4t)\,dt = \tfrac{3}{4}\sin(2t) - \tfrac{3}{4}t - \tfrac{3}{16}\sin(4t) \\ &= \tfrac{3}{4}\sin(2t) - \tfrac{3}{4}t - \tfrac{3}{8}\sin(2t)\cos(2t). \end{aligned}$$

Bude lepší mít i $a(t)$ jen se zdvojeným argumentem:

$$a(t) = -\tfrac{3}{2}\big(\sin^2(t)\big)^2 = -\tfrac{3}{2}\big(\tfrac{1}{2}(1-\cos(2t))\big)^2 = \tfrac{3}{4}\cos(2t) - \tfrac{3}{8} - \tfrac{3}{8}\cos^2(2t).$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} x_{1p}(t) &= \big[\tfrac{3}{4}\cos(2t) - \tfrac{3}{8} - \tfrac{3}{8}\cos^2(2t)\big]\cos(2t) + \big[\tfrac{3}{4}\sin(2t) - \tfrac{3}{4}t - \tfrac{3}{8}\sin(2t)\cos(2t)\big]\sin(2t),\\ x_{2p}(t) &= \big[\tfrac{3}{4}\cos(2t) - \tfrac{3}{8} - \tfrac{3}{8}\cos^2(2t)\big](\cos(2t) + 2\sin(2t))\\ &\qquad + \big[\tfrac{3}{4}\sin(2t) - \tfrac{3}{4}t - \tfrac{3}{8}\sin(2t)\cos(2t)\big](\sin(2t) - 2\cos(2t)) \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} x_{1p}(t) &= \tfrac{3}{4}\cos^2(2t) + \tfrac{3}{4}\sin^2(2t) - \tfrac{3}{8}\cos(2t) - \tfrac{3}{4}t\sin(2t) - \tfrac{3}{8}[\cos^2(2t) + \sin^2(2t)]\cos(2t)\\ &= \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4}\cos(2t) - \tfrac{3}{4}t\sin(2t),\\ x_{2p}(t) &= \tfrac{3}{4}\cos^2(2t) + \tfrac{3}{4}\sin^2(2t) - \tfrac{3}{8}\cos(2t) - \tfrac{3}{4}\sin(2t)\\ &\qquad + \tfrac{3}{2}t\cos(2t) - \tfrac{3}{4}t\sin(2t) - \tfrac{3}{8}[\cos^2(2t) + \sin^2(2t)]\cos(2t)\\ &= \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}(2t-1)\cos(2t) - \tfrac{3}{4}(t+1)\sin(2t). \end{aligned}$$

Pomocí $x = x_p + x_h$ dostaneme obecné řešení:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4}\cos(2t) - \tfrac{3}{4}t\sin(2t) + a\cos(2t) + b\sin(2t),\\ x_2(t) &= \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}(2t-1)\cos(2t) - \tfrac{3}{4}(t+1)\sin(2t) + a[\cos(2t) + 2\sin(2t)] + b[\sin(2t) - 2\cos(2t)] \end{aligned}$$

pro $t \in I\!R$.

To nebylo pěkné. Existuje **alternativa**? Ano, převod $-6\sin^2(t) = 3\cos(2t) - 3$ nabízí pěknější soustavu:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2\\ \dot{x}_2 &= 5x_1 - x_2 + 3\cos(2t) - 3 \end{aligned}$$

V této podobě je možné provést metodu odhadu. Napravo vidíme dva členy, 3 s $\lambda = 0$ (bez korekce) a $3\cos(2t)$ s $\lambda = 2i$ (jednonásobná), a u soustav se dávají členy s korekcemi i bez, takže odhad pro partikulární řešení je

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A + B\cos(2t) + Ct\cos(2t) + D\sin(2t) + Et\sin(2t),\\ x_2(t) &= F + G\cos(2t) + Ht\cos(2t) + I\sin(2t) + Jt\sin(2t). \end{aligned}$$

Dosadíme do soustavy:

$$\begin{aligned} &-2B\sin(2t) + C\cos(2t) - 2Ct\sin(2t) + 2D\cos(2t) + E\sin(2t) + 2Et\cos(2t)\\ &\quad = A + B\cos(2t) + Ct\cos(2t) + D\sin(2t) + Et\sin(2t)\\ &\qquad\quad - F - G\cos(2t) - Ht\cos(2t) - I\sin(2t) - Jt\sin(2t),\\ &-2G\sin(2t) + H\cos(2t) - 2Ht\sin(2t) + 2I\cos(2t) + J\sin(2t) + 2Jt\cos(2t)\\ &\quad = 5A + 5B\cos(2t) + 5Ct\cos(2t) + 5D\sin(2t) + 5Et\sin(2t)\\ &\qquad\quad - F - G\cos(2t) - Ht\cos(2t) - I\sin(2t) - Jt\sin(2t)\\ &\qquad\qquad + 3 - 3\cos(2t) \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned}&(-A+F)+(-C+2E+H)t\cos(2t)+(-B+C+2D+G)\cos(2t)\\&\quad+(-2C-E+J)t\sin(2t)+(-2B-D+E+I)\sin(2t)=0,\\&(-5A+F)+(-5C+H+2J)t\cos(2t)+(-5B+G+H+2I)\cos(2t)\\&\quad+(-5E-2H+J)t\sin(2t)+(-5D-2G+I+J)\sin(2t)\\&\qquad=3-3\cos(2t)\end{aligned}$$

a dostáváme rovnice $\begin{aligned}-A+F&=0\\-5A+F&=-3\end{aligned}$, odkud snadno najdeme $A$ a $F$, a pak rovnice

$$\begin{aligned}&-C+2E+H=0,\ -B+C+2D+G=0,\ -2C-E+J=0,\ -2B-D+E+I=0\\&-5C+H+2J=0,\ -5B+G+H+2I=3,\ -5E-2H+J=0,\ -5D-2G+I+J=0.\end{aligned}$$

Zde již podsoustavu nenajdeme, je třeba řešit soustavu $8\times 8$ a najednou to vypadá, že ta variace zas tak hrozná nebyla. Během eliminace se ukáže, že některé konstanty je možné si zvolit. Vzali jsme $G=-\frac{3}{4}$, $I=-\frac{3}{4}$ (inspirováni řešením obdrženým z variace) a máme

$$\begin{aligned}&A=\tfrac{3}{4},\ B=-\tfrac{3}{4},\ C=0,\ D=0,\ E=-\tfrac{3}{4},\\&F=\tfrac{3}{4},G=-\tfrac{3}{4},\ H=\tfrac{3}{2},\ I=-\tfrac{3}{4},\ J=-\tfrac{3}{4}.\end{aligned}$$

Vyšlo nám pak stejné partikulární řešení jako u metody variace a zbytek postupu je stejný.

**Metoda eliminační**: Z první rovnice $x_2=x_1-\dot{x}_1 \quad (*)$, dosadíme do druhé: $\ddot{x}_1+4x_1=6\sin^2(t)$. Je to nehomogenní lineární rovnice, nejprve tedy řešíme homogenní. Dostáváme $\lambda=\pm 2i$, máme řešení $x_{1h}(t)=a\sin(2t)+b\cos(2t)$ homogenní rovnice.
Teď musíme řešit nehomogenní $\ddot{x}_1+4x_1=6\sin^2(t)$. Pravá strana není speciální, takže variace konstant. $x_1(t)=a(t)\sin(2t)+b(t)\cos(2t)$ dává

$$\begin{aligned}a'(t)\sin(2t)+b'(t)\cos(2t)&=0\\2a'(t)\cos(2t)-2b'(t)\sin(2t)&=6\sin^2(t)\end{aligned}\implies\begin{aligned}a'(t)&=3\sin^2(t)\cos(2t)\\b'(t)&=-3\sin^2(t)\sin(2t)\end{aligned}$$

Vyšla přesně stejná soustava jako u variace pro soustavy, takže se stejně najde $x_{1p}$ a dosazením do $(*)$ pak získáme $x_{2p}$.
Viděli jsme ovšem také možnost napsat si pravou stranu jinak:

$$\ddot{x}_1+4x_1=6\sin^2(t)=3-3\cos(2t).$$

To už je speciální pravá strana, odhadneme tvar řešení (pozor na překryv a kompenzační faktor $t$) $x_1(t)=A+Bt\sin(2t)+Ct\cos(2t)$. Dosadíme do levé strany rovnice:

$$4A+4B\cos(2t)-4C\sin(2t)=3-3\cos(2t)\implies A=\tfrac{3}{4},\ B=-\tfrac{3}{4},\ C=0.$$

Máme tedy partikulární řešení $x_{1p}(t)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}t\sin(2t)$. Najdeme obecné řešení

$$x_1(t)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}t\sin(2t)+a\sin(2t)+b\cos(2t),$$

to pak dosadíme do $(*)$ a získáme $x_2(t)$.
Je možné si všimnout, že $x_{1p}$ zde obdržené není stejné jako u dřívějších pokusů, opět jde o posun o homogenní řešení.