Příklady na M6C - pravděpodobnost

Nechť X je náhodná veličina s hustotou $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2), & x \in (-1,1); \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$

a) Najdi $\mathrm{E}[X]$ a $\mathrm{E}[X^2]$.
b) Najdi varianci $\mathrm{Var}(X)$.
c) Najdi kvantil $x_{0.9}$. Nemusíš najít $x_{0.9}$ přesně, stačí jej zadat nějakou algebraickou rovnicí.

Nechť X je náhodná veličina s hustotou $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \in (0,2); \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$ Definujeme náhodnou veličinu $Y = X^2$.
a) Najdi hustotu pro Y.
b) Najdi střední hodnotu $\mathrm{E}[Y]$.

Náhodné veličiny X, Y jsou dány sdruženou hustotou $f_{X,Y} = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y$ pro $x, y \in [0,1]$.
a) Najdi marginální hustoty f_X, f_Y. Jsou X, Y nezávislé?
b) Najdi $E[X]$ a $E[Y]$, σ_X a σ_Y.
c) Najdi $\mathrm{Cov}(X,Y)$ and $\varrho_{X,Y}$.
d) Nechť $U = \frac{1}{3}Y$, $V = \frac{X}{Y}$. Najdi sdruženou hustotu $f_{U,V}$.

Dvourozměrná normální náhodná veličina (X_1, X_2) je dána kovarianční maticí $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a středními hodnotami $\mu_{1,2} = 0$. Najdi sdruženou hustotu f_{X_1,X_2}.

Nechť hustota f náhodné veličiny X je souměrná podle bodu 0. Dokaž, že pro kvantil x_β a libovolné $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ máme $x_{-\alpha} = -x_{1-\alpha}$.

Nechť X_1, X_2, X_3 jsou nezávislé normální veličiny s parametry $\mu = 0$ a $\sigma > 0$.
a) Popiš veličinu $Z = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ (porovnat s nějakou známou, dát jí jméno).
b) Najdi hustotu Z.

Víme, že charakteristická funkce náhodné veličiny $Z = N(0,1)$ je $\psi(t) = e^{-t^2/2}$. Nechť X je normální náhodná veličina s parametry $\mu = 0$ a $\sigma > 0$.
a) Najdi charakteristickou funkci veličiny X.
b) Najdi hodnotu $\mathrm{E}[X^4]$.

Víme, že charakteristická funkce náhodné veličiny $Z = N(\mu, \sigma^2)$ je $\psi(t) = e^{j\mu t - t^2\sigma^2/2}$. Nechť X je $N(2, 5^2)$, Y je $N(3, 3^2)$. Urči (a dokaž svou odpověď) jaké rozdělení má veličina $X + Y$.

Příklady na M6C - odhady

Výška odvedenců je normální náhodná veličina s parametry $\mu = 175$, $\sigma = 10$. Nejvyšších 15% jde do hradní stráže. Jaká výška je hranicí pro vstup do stráže?

Délka vyrobených párků je normální náhodná veličina s parametry $\mu = 20$, $\sigma = 1$. Nejmenších 10% jde zpátky do mlýnku. Jaká délka je hranicí pro vyřazení?

Počet holubů na Staromáku v jednotlivé letní dny je náhodná veličina X s neznámým rozdělením. Dlouhodobým měřením odhadujeme, že $\mu_X = 150$ a $\sigma_X \leq 20$.
a) jakými výběrovými statistikami jsme asi odhadli μ_X a σ_X?
b) Odhadni pravděpodobnost, že jich zítra napočítáme alespoň 200.
c) Odhadni pravděpodobnost, že když je zítra spočítáme, dostaneme číslo lišící se od 150 o víc než 40.
d) Pro které číslo a můzeme se spolehlivostí 90% prohlásit, že jich tam zítra bude v rozmezí $150 \pm a$?

Zjišťujeme, kolik procent lidí nosí brýle, proto sledujeme alternativní náhodnou veličinu X s parametrem p. Hledáme průměr $p = \mu_X$ a víme, že $\sigma_X \leq \frac{1}{2}$ (je to alternující n.v.).
Opakovaným měřením dostaneme výběrový průměr $\overline{X}_{500}$. Jaká je pravděpodobnost, že $|\overline{X}_{500} - \mu_X| < \frac{1}{10}$?

Najdi nějaký dolní odhad (chceme co největší spolehlivost, že $|\overline{X}_{500}$ dá skoro μ_X—s chybou $\frac{1}{10}$).

X je Poissonova náhodná veličina. Jakou výběrovou statistikou bys odhadl parametry μ_X a σ_X^2 a proč?

X je normální náhodná veličina. Jakou výběrovou statistikou bys odhadl parametry μ_X a σ_X^2 a proč?

Nechť X je normální náhodná veličina s rozdělením $N(3, \sigma^2)$. Definujeme náhodnou veličinu $Y = (X+1)^2$.
a) Najdi E$[Y]$.
b) Naměříme pro Y hodnoty 17.25, 15.75, 20.50, 19.75, 18.00. Odhadni hodnotu parametru σ metodou momentů.

Nechť X je normální náhodná veličina s rozdělením $N(0, \sigma^2)$. Definujeme náhodnou veličinu $Y = X^2$. Naměříme hodnoty 4, 1, 0, 2.25, 0.25. Odhadni hodnotu parametru σ metodou momentů.

Náhodná veličina X má rozdělení $P(X = 0) = p$, $P(X = 1) = 2p$, $P(X = 2) = 1 - 3p$. Máme-li naměřeny hodnoty 1, 0, 2, 2, 1, 0, 2, 1, 2, 2, odhadni hodnotu parametru p metodou momentů.

Náhodná veličina X má rozdělení $P(X = 0) = p$, $P(X = 1) = 2p$, $P(X = 2) = 1-3p$. Máme-li naměřeny hodnoty 1, 0, 2, 2, 1, 0, 2, 1, 2, 2, odhadni hodnotu parametru p metodou maximální věrohodnosti.

Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení s parametrem λ. Máme-li naměřeny hodnoty 1, 0, 2, 2, 1, odhadni hodnotu parametru k metodou momentů.

Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení s neznámým parametrem λ. Definujeme $Y = X + a$, kde a je konstanta.
a) Najdi E$[Y^2]$.
b) Máme-li naměřeny hodnoty 3,3,1,5, odhadni hodnoty parametrů a a λ metodou momentů.

Nechť X je normální náhodná veličina s neznámými parametry μ, $\sigma^2 > 0$. Nechť $Y = 1 + 2X$. Měření pro Y dalo 1,3,2,5,4. Odhadni hodnoty parametrů mu a σ metodou momentů.

Náhodná veličina X má rozdělení $f(x) = \begin{cases} (k+1)x^k, & x \in (0,1); \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$
a) Najdi E$[X]$.
b) Máme-li naměřeny hodnoty 0.3, 0.7, 0.8, 0.8, 0.9, odhadni hodnotu parametru k metodou momentů.

Náhodná veličina X má rozdělení $f(x) = \begin{cases} (k+1)x^k, & x \in (0,k); \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$
a) Najdi kvantil $x_{0.7}$.
b) Máme-li naměřeny hodnoty 0.3, 0.7, 0.8, 0.8, 0.9, odhadni hodnotu parametru k metodou maximální věrohodnosti.

Náhodná veličina X má rozdělení $f(x) = \begin{cases} \frac{x^k(k+1)}{2^{k+1}}, & x \in (0,2); \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases}$ kde parametr je $k > -1$.
a) Najdi E$[X]$.
b) Máme-li naměřeny hodnoty 1,0,2,2,1, odhadni hodnotu parametru k metodou momentů.

Náhodná veličina X má rozdělení $f(x) = \begin{cases} \frac{x^k(k+1)}{2^{k+1}}, & x \in (0,2); \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases}$ kde parametr je $k > -1$.
a) Najdi E$[X^2]$.
b) Máme-li naměřeny hodnoty 1,0,2,2,2, odhadni hodnotu parametru k metodou momentů za použití části a).

Odvoď teoreticky oboustranný intervalový odhad (s věrohodností $1 - \alpha$, tj. hranicí významnosti α) pro parametr μ normální náhodné veličiny X.

Odvoď teoreticky horní intervalový odhad (s věrohodností $1-\alpha$, tj. hranicí významnosti α) pro parametr σ normální náhodné veličiny X.

Příklady na M6C - výběrové statistiky

Nechť X je normální náhodná veličina.
a) Jak popíšeme rozdělení veličiny S_n^2?
b) Jaké je rozdělení veličiny $\frac{\overline{X}_n}{\sqrt{S_n^2/n}}$?
c) Kolik je kvantil $\chi^2_{200,0.95}$?

Měřená veličina X má normální rozdělení s neznámými parametry μ, σ. Najdi oboustranný odhad pro μ s věrohodností 99% (tj. hladina významnosti 1%), pokud:
a) naměříme a pak dostaneme $\overline{X}_{10} = 5$, $S_{10}^2 = 15$.
b) naměříme a pak dostaneme $\overline{X}_{1001} = 5$, $S_{1001}^2 = 15$.

Měřená veličina X má normální rozdělení s parametrem $\sigma = 5$.
a) Najdi horní odhad pro μ s věrohodností 90% (tj. hladina významnosti 10%).
b) Kolik pokusů musíme provést, aby náš odhad parametru μ měl s věrohodností 90% chybu nejvýše $\frac{1}{10}$?

Měřená veličina X má normální rozdělení s neznámými parametry μ, σ. Najdi oboustranný odhad pro μ s věrohodností 90% (tj. hladina významnosti 10%), pokud
a) jsme naměřili 8,8,10,8,7,8,9,8,6,8,
b) měření dalo $\overline{X}_{501} = 8$, $S_{501}^2 = 2$.

V ohromném podniku si náhodně vybereme 10 lidí a z nich 6 jsou muži. Můžeme říct s věrohodností 95% (tj. hladina významnosti 5%), že většina zaměstnanců jsou muži?

V ohromném podniku si náhodně vybereme 10 lidí a z nich 6 jsou muži. S jakou věrohodností můžeme říct, že většina zaměstnanců jsou muži?

Měřená veličina X má normální rozdělení s neznámými parametry μ, σ, my se snažíme naměřit μ. Očekáváme-li $\sigma \leq 10$, kolik měření musíme provést, aby s věrohodností 95% (tj. hladina významnosti 5%) nepřevýšila chyba měření hodnotu 5?

Měřená veličina X má normální rozdělení s parametry $\mu = 100$, $\sigma = 5$.
Rozhodneme se k odhadu σ^2 použít S_N^2. Pro jaké číslo r můžeme s věrohodností 95% (tj. hladina významnosti 5%) očekávat, že $S_N^2 \leq r^2$?
a) Spočítej to pro $N = 11$.
b) Spočítej to pro $N = 501$.

Měřená veličina X má normální rozdělení s neznámými parametry μ, σ. Najdi horní odhad pro σ s věrohodností 95% (tj. hladina významnosti 5%), pokud
a) měření dá 8,8,10,8,7,8,9,8,6,8,
b) měření dá $\overline{X}_{201} = 8.1$ a $S_{201}^2 = 2$.

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, 4)$.
a) Odhadněte pravděpodobnost, že odchylka $\overline{X}_n$ od μ bude menší než 0.1. Počítejte nejprve obecně, pak pro $n = 100$.
b) Nechť $\mu = 0$. Najdi pravděpodobnost, že

$$(\overline{X}_n, S_n^2) \in < 0, 1 > \times \langle 0, \tfrac{4}{n-1}\chi^2_{n-1,0.5} \rangle$$

Počítej nejprve obecně, pak pro $n = 100$.

Odvoď teoreticky oboustranný intervalový odhad (s věrohodností $1-\alpha$, tj. hranicí významnosti α) pro parametr μ normální náhodné veličiny X.

Odvoď teoreticky horní intervalový odhad (s věrohodností $1-\alpha$, tj. hranicí významnosti α) pro parametr σ normální náhodné veličiny X.

Příklady na M6C - hypotézy

Měřená veličina X má normální rozdělení s neznámými parametry μ, σ. Naměřili jsme 4,6,7,5,5,8,5,6,6,8. Můžeme s věrohodností 99% (tj. hladina významnosti 1%) vyvrátit hypotézu $\mu = 7$ ve prospěch alternativy $\mu \neq 7$?

Měřená veličina X má normální rozdělení s neznámými parametry μ, σ. Najdi testovací výběrovou statistiku T a hodnotu c tak, abychom v případě $T > c$ vyloučili hypotézu $\mu = 10$ ve prospěch alternativy $\mu > 10$ s věrohodností 95% (tj. hladina významnosti 5%).
a) Svůj postup teoreticky odůvodni.
b) Urči správné konstanty pro případ $n = 11$.
c) Urči správné konstanty pro případ $n = 900$.

Měřená veličina X má normální rozdělení s neznámými parametry μ, σ. Najdi testovací výběrovou statistiku T a hodnotu c tak, abychom v případě $T < c$ vyloučili hypotézu $\sigma = 5$ ve prospěch alternativy $\sigma < 5$ s věrohodností 95% (tj. hladina významnosti 5%).
a) Svůj postup teoreticky odůvodni.
b) Urči správné konstanty pro případ $n = 11$.
c) Urči správné konstanty pro případ $n = 201$.

Měřené veličiny X, Y mají normální rozdělení s neznámými parametry μ_X a μ_Y. Naměřili jsme nezávislé hodnoty $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$. Najdi testovací výběrovou statistiku T a hodnotu c tak, abychom v případě $|T| > c$ vyloučili hypotézu $\mu_X = \mu_Y$ ve prospěch alternativy $\mu_X \neq \mu_Y$ s věrohodností 90% (tj. hladina významnosti 10%).
a) Svůj postup teoreticky odůvodni.
b) Urči správné konstanty pro případ $n = 11$.
c) Urči správné konstanty pro případ $n = 201$.

Měřené nezávislé veličiny X, Y mají normální rozdělení s neznámými parametry μ_X, σ_X a μ_Y, σ_Y. Naměřili jsme hodnoty $X_1, \ldots, X_m$ a $Y_1, \ldots, Y_n$. Předpokládej, že $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$. Najdi testovací výběrovou statistiku T a hodnotu c tak, abychom v případě $|T| > c$ vyloučili hypotézu $\mu_X = \mu_Y$ ve prospěch alternativy $\mu_X \neq \mu_Y$ s věrohodností 90% (tj. hladina významnosti 10%).

Měřené veličiny X, Y mají normální rozdělení s neznámými parametry μ_X, σ_X a μ_Y, σ_Y. Popiš postup při testování hypotézy $\sigma_X = \sigma_Y$ oproti alternativě $\sigma_X \neq \sigma_Y$ se zadanou věrohodností 95% (tj. hladina významnosti 5%).

Příklady na M6C - stochastické procesy

Komplexní náhodná veličina $Z = X + jY$ má kovarianční matici $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ pro X a Y.
a) Najdi $\mathrm{Cov}\big(Z, 2\overline{Z}\big)$.
b) Najdi $\mathrm{Cov}\big(2\overline{Z}, Z\big)$.

Komplexní náhodná veličina $Z = X + jY$ má kovarianční matici $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ pro X a Y.
a) Najdi $\mathrm{Cov}\big(Z, 2\overline{Z}\big)$.
b) Najdi $\mathrm{Cov}\big(2\overline{Z}, Z\big)$.

Nechť $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je stacionární proces, X_n navzájem nezávislé. Máme $\mathrm{E}[X_n] = \mu$ a $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 > 0$. Definujeme klouzavý průměr
$$Y_n = \frac{X_{n-2} + 2X_n}{3}.$$

a) Najdi $R(n,m)$ pro $\{Y_n\}$.
b) Je $\{Y_n\}$ stacionární? Jaké je pak $R(k)$?
c) Je $\{Y_n\}$ ergodický?
Odpovědi zdůvodni!

Nechť $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je stacionární proces, X_n navzájem nezávislé. Máme $\mathrm{E}[X_n] = \mu$ a $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 > 0$. Definujeme klouzavý průměr

$$Y_n = \frac{X_{n-2} + 2X_{n-1} + X_n}{4}.$$

Víme z teorie, že $\{Y_n\}$ je ergodický.
a) Má $\{Y_n\}$ spektrální hustotu?
b) Pokud ano, najdi $f(\lambda)$.
Odpovědi zdůvodni!

Nechť $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je stacionární proces, X_n navzájem nezávislé. Máme $\mathrm{E}[X_n] = \mu$ a $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 > 0$. Definujeme klouzavý průměr

$$Y_n = \frac{X_{n-1} + 2X_n}{3}.$$

Víme z teorie, že $\{Y_n\}$ je ergodický.
a) Najdi $R(k)$.
b) Má $\{Y_n\}$ spektrální hustotu?
c) Pokud ano, najdi $f(\lambda)$.
Odpovědi zdůvodni!

Nechť $R(t)$ je kovarianční funkce stacionárního procesu $\{X_n\}$. Dokažte, že $R(-t) = \overline{R(t)}$.

Nechť stacionární proces $\{X_n\}$ má kovarianční funkci $R(n) = 2e^{-2|n|}\cos(n\pi)$ pro n celé.
a) Je tento proces ergodický?
b) Má spektrální hustotu?
c) Pokud ano, najdi $f(\lambda)$.
Odpovědi zdůvodni!

Nechť stacionární proces $\{X_t\}$ má kovarianční funkci $R(t) = 2e^{-2|t|}\sin(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.
a) Je tento proces ergodický?
b) Má spektrální hustotu?
c) Pokud ano, najdi $f(\lambda)$.
Odpovědi zdůvodni!
Poznámka: při řešení snad pomůže $|\sin(t)| \leq 1$.

Nechť stacionární proces $\{X_n\}$ má kovarianční funkci $R(n) = e^{-2|n|}$ pro n celé.
a) Je tento proces ergodický?
b) Má spektrální hustotu?
c) Pokud ano, najdi $f(\lambda)$.
Odpovědi zdůvodni!

Nechť stacionární proces $\{X_t\}$ má kovarianční funkci $R(t) = e^{-2|t|}$ pro $t \in \mathbb{R}$.
a) Je tento proces ergodický?
b) Má spektrální hustotu?
c) Pokud ano, najdi $f(\lambda)$.
Odpovědi zdůvodni!

Nechť X je náhodná veličina s parametry $\mu_X = 0$, $\sigma_X > 0$. Definujeme stochastický proces

$$Y_n = \cos(n\pi)X \text{ pro } n \text{ celé.}$$

a) Najdi $R(n,m)$.
b) Je $\{Y_n\}$ stacionární? Jaké je pak $R(k)$?

c) Je $\{Y_n\}$ ergodický?
Odpovědi zdůvodni!
Poznámka: kolik je $\cos(n\pi)$?

Nechť X je náhodná veličina s parametry $\mu_X = 0$, $\sigma_X > 0$. Definujeme stochastický proces

$$Y_n = (-1)^n X \text{ pro } n \text{ celé.}$$

a) Najdi $R(n, m)$.
b) Je $\{Y_n\}$ stacionární? Jaké je pak $R(k)$?
c) Je $\{Y_n\}$ ergodický?
Odpovědi zdůvodni!

Máme reálný gaussovský proces $\{X_n\}$ s $\mu = 0$, víme že $R(n) \to 0$. Naměřili jsme postupně hodnoty 5,0,1,-7,3,-2,0,-3,1,-1,0,2,1. Odhadni $R(3)$.

Kdy je náhodný proces stacionární?

Kdy je stacionární náhodný proces $\{X_n\}$ ergodický?
Chci buď definici nebo ekvivalentní podmínku. Za podmínku postačující je půlka bodů.

Co je to obálka náhodného procesu X_n?

Příklady na M6C - PDE

Napiš rovnici vlnění.

Napiš Laplaceovu rovnici.

Napiš Helmholtzovu rovnici.

Formuluj vnitřní okrajovou úlohu (Dirichletova úloha).

Formuluj vnější okrajovou úlohu.

Kolik řešení má vnitřní okrajová úloha?