Řady funkcí

0. Opakování: Reálné řady

Definice.
Řada je symbol $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots$, kde $n_0 \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{R}$ (reálná řada).

Definice.
Nechť $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ je řada.

Definujeme její **částečné součty** jako $s_N = \sum\limits_{k=n_0}^{N} a_k$ pro $N \geq n_0$.

Řekneme, že daná řada **konverguje**, jestliže $\{s_N\}_{N=n_0}^{\infty}$ konverguje.

Řekneme, že daná řada **konverguje k** A, značíme $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k = A$, jestliže $\lim\limits_{N\to\infty}(s_N) = A$.

Řekneme, že daná řada **diverguje**, jestliže $\{s_N\}_{N=n_0}^{\infty}$ diverguje.

Řekneme, že daná řada **diverguje k** ∞, značíme $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k = \infty$, jestliže $\lim\limits_{N\to\infty}(s_N) = \infty$.

Řekneme, že daná řada **diverguje k** $-\infty$, značíme $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k = -\infty$, jestliže $\lim\limits_{N\to\infty}(s_N) = -\infty$.

Příklad.
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$: $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, indukce: $s_N = 1 - \frac{1}{2^N}$, proto $s_N \to 1$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ (řada konverguje).

Příklad.
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1$: $s_1 = 1$, $s_2 = 1+1 = 2$, $s_3 = 1+1+1 = 3$, indukce: $s_N = N$, proto $s_N \to \infty$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$ (řada diverguje).

Příklad.
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k$: $s_0 = 1$, $s_1 = 1 - 1 = 0$, $s_2 = 1 - 1 + 1 = 1$, indukce: $s_N = \begin{cases} 1, & N \text{ sudé;} \\ 0, & N \text{ liché,} \end{cases}$ proto $\lim\limits_{N\to\infty}(s_N)$ neex. a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ diverguje.

0.1. Sčítání řad

Definice.
Nechť $a, q \in \mathbb{R}$. Řada $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a\,q^k$ se nazývá **geometrická řada**.

Fakt.
(i) Pro $N \in \mathbb{N}_0$ platí $\sum\limits_{k=0}^{N} q^k = \dfrac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$.

(ii) Máme $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k \begin{cases} = \frac{1}{1-q}, & |q| < 1; \\ = \infty \text{ (diverguje)}, & q \geq 1; \\ \text{diverguje}, & q \leq -1. \end{cases}$

Sčítání řad: umíme přímo sečíst dva druhy:

1) geometrická řada (případně v převleku):

Příklad.

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{5\cdot 3^{k-1}}{2^{2k+1}}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{5\cdot 3^{-1}\cdot 3^{k}}{2^{1}\cdot(2^{2})^{k}}=\tfrac{5}{6}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3^{k}}{4^{k}}=\tfrac{5}{6}\sum_{k=2}^{\infty}\big(\tfrac{3}{4}\big)^{k}=\tfrac{5}{6}\big(\tfrac{3}{4}\big)^{2}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tfrac{3}{4}\big)^{k}$$
$$=\left\langle\!\!\left\langle\big|\tfrac{3}{4}\big|<1\right\rangle\!\!\right\rangle=\tfrac{5}{6}\big(\tfrac{3}{4}\big)^{2}\tfrac{1}{1-\frac{3}{4}}=\tfrac{15}{8}.$$

Poznámka: Obecně pro geometrickou $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}q^k=q^{n_0}\sum\limits_{k=0}^{\infty}q^k$.

Nebo substituce: $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\big(\tfrac{3}{4}\big)^{k}=\left|\begin{matrix}n=k-2\implies k=n+2\\ 2\mapsto 0,\ \infty\mapsto\infty\end{matrix}\right|=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\big(\tfrac{3}{4}\big)^{n+2}=\big(\tfrac{3}{4}\big)^{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\big(\tfrac{3}{4}\big)^{n}.$

Ta se dá použít pro všechny řady, občas značím $\big|k-2\mapsto k^*\big|$.

2) teleskopická řada (případně v převleku):

Příklad.

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=3}^{\infty}\big(\tfrac{1}{k-1}-\tfrac{1}{k}\big)=\big(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\big)+\big(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\big)+\big(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}\big)+\dots.$$

Indukce: $s_N=\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\to\frac{1}{2}$, proto $\sum\limits_{k=3}^{\infty}\dfrac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{2}$.

Poznámka: vzorce pro konečné sumy:

$\sum\limits_{k=1}^{n}1=n$, $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$, $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, atd.

Věta.

Nechť řady $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}a_k$, $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}b_k$ konvergují.

Pak konverguje i $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}(a_k+b_k)$ a $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}a_k+\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}a_k$.

Pro $c\in\mathbb{R}$ konverguje i $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}(c\,a_k)$ a $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}(c\,a_k)=c\Big(\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}a_k\Big)$.

0.2. Konvergence řad

Věta.

Nechť $n_0<n_1$, uvažujme řadu $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}a_k$. $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}a_k$ konverguje právě tehdy, když $\sum\limits_{k=n_1}^{\infty}a_k$ konverguje.

Navíc pak platí $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}a_k=\sum\limits_{k=n_0}^{n_1-1}a_k+\sum\limits_{k=n_1}^{\infty}a_k$.

Pokud nás zajímá jen konvergence řasy a ne její konkrétní (případný) součet, vynecháváme specifikaci indexu.

Věta. (**nutná podmínka** konvergence)

Jestliže řada $\sum a_k$ konverguje, pak nutně $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k)=0$.

Ekvivalentně: Jestliže neplatí $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k)=0$, pak řada $\sum a_k$ nutně diverguje.

Věta.

Uvažujme řadu $\sum a_k$. Jestliže $a_k\geq 0$ pro všechna k, pak buď $\sum a_k$ konverguje, nebo $\sum a_k=\infty$.

0.2.1. Testy pro řady s nezápornými členy

Věta. (**integrální kritérium**)
Nechť $f \geq 0$ je nerostoucí na $\langle n_0, \infty)$ pro $n_0 \in \mathbb{Z}$.
Řada $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje.

Navíc pak platí $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f(k) \leq f(n_0) + \int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$.

Příklad.
$\sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{1}{k\ln^2(k)}$: $\int\limits_{x=3}^{\infty} \dfrac{dx}{x\ln^2(x)} = \left| \begin{array}{c} y = \ln(x) \\ dy = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int\limits_{x=\ln(3)}^{\infty} \dfrac{dy}{y^2} < \infty$. Proto řada konverguje.

Také $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k\ln^2(k)} \in \left\langle \frac{1}{\ln(3)}, \frac{1}{3\ln^2(3)} + \frac{1}{\ln(3)} \right\rangle \sim \langle 0.91, 1.19 \rangle$.

Trik: $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k\ln^2(k)} = \sum\limits_{k=3}^{9} \frac{1}{k\ln^2(k)} + \sum\limits_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k\ln^2(k)}$

$\in \Big[\sum\limits_{k=3}^{9} \frac{1}{k\ln^2(k)} + \int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2(x)}, \sum\limits_{k=3}^{9} \frac{1}{k\ln^2(k)} + \frac{1}{10\ln^2(10)} + \int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2(x)}\Big] \sim [1.059, 1.078]$.

Důsledek. (**p-test**)
$\sum \frac{1}{k^p}$ konverguje právě tehdy, když $p > 1$.

Příklad.
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} = \infty$ (**harmonická řada**).

Věta. (**srovnávací test**)
Nechť $\exists n_0$ tak, aby $0 \leq a_k \leq b_k$ pro $k \geq n_0$.
Jestliže $\sum b_k$ konverguje, pak také $\sum a_k$ konverguje.
Jestliže $\sum a_k$ diverguje, pak také $\sum b_k$ diverguje (tj. $\sum a_k = \infty \implies \sum b_k = \infty$).
Poznámka: symbolicky (a zhruba) $a_k \leq b_k \implies \sum a_k \leq \sum b_k$.

Věta. (**limitní srovnávací test**)
Nechť $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ tak, aby $a_k \geq 0, b_k \geq 0$ pro $k \geq n_0$.
Jestliže $a_k \sim b_k$, tj. $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{a_k}{b_k}\right) = A > 0$, pak $\sum a_k \sim \sum b_k$, tj. $\sum a_k$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum b_k$.

Příklad.
$\sum \frac{1}{k^2+1}$: $0 \leq \frac{1}{k^2+1} \leq \frac{1}{k^2}$ a $\sum \frac{1}{k^2}$ konverguje, proto dle ST i $\sum \frac{1}{k^2+1}$ konverguje.
Poznámka: řel by i integrální test a limitní srovnávací test.

Příklad.
$\sum \frac{1}{2k^2-1}$: $\frac{1}{2k^2-1} \geq \frac{1}{2k^2} \geq 0$, $\sum \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{k^2}$ konverguje, ale nerovnost jde špatným směrem, proto žádný závěr.

Odhad $\frac{1}{2k^2-1} \sim \frac{1}{2k^2}$ pro k velké, potvrdíme: $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{2k^2-1}}{\frac{1}{2k^2}} \right) = 1 > 0$,
$\sum \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{k^2}$ konverguje, proto dle LST i $\sum \frac{1}{2k^2-1}$ konverguje.

Příklad.
$\sum \frac{1}{k\ln^2(k)}$: Nabízí se dvě srovnání, $\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k\ln^2(k)} \le \frac{1}{k}$, ale obě vedou špatným směrem, proto nic.
Limitní srovnání: Není kandidát, rozhodně neplatí $\frac{1}{k\ln^2(k)} \sim \frac{1}{k}$ nebo $\frac{1}{k\ln^2(k)} \sim \frac{1}{k^2}$.
Srovnávací testy tedy nepomohou.

Věta.
Nechť $a_k \ge 0$ pro všechna k.
podílové kritérium:
(i) Jestliže $\exists q < 1$ a $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ splňující $\forall k \ge n_0$: $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le q$, pak $\sum a_k$ konverguje.
(ii) Jestliže $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ splňující $\forall k \ge n_0$: $\frac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1$, pak $\sum a_k$ diverguje $(= \infty)$.
limitní podílové kritérium: Nechť $\lambda = \lim\limits_{k\to\infty} \big(\frac{a_{k+1}}{a_k}\big)$, pokud limita konverguje.
(i) Jestliže $\lambda < 1$, pak $\sum a_k$ konverguje.
(ii) Jestliže $\lambda > 1$, pak $\sum a_k$ diverguje $(= \infty)$.
odmocninové kritérium:
(i) Jestliže $\exists q < 1$ a $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ splňující $\forall k \ge n_0$: $\sqrt[k]{a_k} \le q$, pak $\sum a_k$ konverguje.
(ii) Jestliže $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ splňující $\forall k \ge n_0$: $\sqrt[k]{a_k} \ge 1$, pak $\sum a_k$ diverguje $(= \infty)$.
limitní odmocninové kritérium: Nechť $\varrho = \lim\limits_{k\to\infty} \big(\sqrt[k]{a_k}\big)$, pokud limita konverguje.
(i) Jestliže $\varrho < 1$, pak $\sum a_k$ konverguje.
(ii) Jestliže $\varrho > 1$, pak $\sum a_k$ diverguje $(= \infty)$.

Příklad.
$\sum \frac{k!}{2^k}$: Limitní podílový test $\lambda = \lim\limits_{k\to\infty} \big(\frac{a_{k+1}}{a_k}\big) = \lim\limits_{k\to\infty} \big(\frac{(k+1)!}{k!}\,\frac{2^k}{2^{k+1}}\big) = \lim\limits_{k\to\infty} \big(\frac{1}{2}(k+1)\big) = \infty > 1$.
Proto $\sum \frac{k!}{2^k}$ diverguje.

Příklad.
$\sum \frac{2}{\ln^k(k+1)}$: Limitní odmocninový test $\varrho = \lim\limits_{k\to\infty} \big(\sqrt[k]{a_k}\big) = \lim\limits_{k\to\infty} \big(\frac{\sqrt[k]{2}}{\ln(k+1)}\big) = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$.
Proto $\sum \frac{2}{\ln^k(k+1)}$ konverguje.

Příklad.
$\sum \big(\frac{k}{k+1}\big)^k$: Limitní odmocninový test $\varrho = \lim\limits_{k\to\infty} \big(\sqrt[k]{a_k}\big) = \lim\limits_{k\to\infty} \big(\frac{k}{k+1}\big) = 1$, není žádný závěr.
Podobně limitní podílový. Integrální test bez šance, srovnání taky.
Ale: $a_k = \big(1 - \frac{1}{k+1}\big)^k \to e^{-1} \ne 0$, proto $\sum \big(\frac{k}{k+1}\big)^k$ diverguje.

0.2.2. Testy pro alternující řady

Věta. (**Leibnizovo kritérium**)
Nechť $b_k \ge 0$ pro všechna k a $\{b_k\}$ je nerostoucí.
Řada $\sum (-1)^k b_k$ konverguje právě tehdy, když $\lim\limits_{k\to\infty} (b_k) = 0$.

Příklad.
$\sum \frac{(-1)^k}{k}$: $b_k = \frac{1}{k} \ge 0$ je klesajici a $\to 0$, proto $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ konverguje (srovnej s harmonickou řadou).

0.3. Absolutní konvergence řad

Definice.
Řada $\sum a_k$ **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada $\sum |a_k|$.

Věta.
Jestliže řada $\sum a_k$ konverguje absolutně, pak také konverguje a platí $\Bigl|\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k\Bigr| \le \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} |a_k|$.
Ale ne naopak! Viz $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ konverguje, ale $\sum\bigl|\frac{(-1)^k}{k}\bigr| = \sum \frac{1}{k} = \infty$.

Definice.
Řekneme, že daná řada **konverguje neabsolutně** (také **konverguje podmíněně**), jestliže konverguje, ale nekonverguje absolutně.

Takže tři možnosti:
—$\sum a_k$ konverguje, $\sum |a_k|$ konverguje: absolutní konvergence (ta druhá už implikuje tu první)
—$\sum a_k$ konverguje, $\sum |a_k|$ diverguje: neabsolutní konvergence
—$\sum a_k$ diverguje, $\sum |a_k|$ diverguje (ta první už implikuje tu druhou)

Příklad.
neabsolutní konvergence: $\sum \frac{(-1)^k}{k}$; absolutní konvergence: $\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$; divergence: $\sum (-1)^k$.

Příklad.
$\sum \frac{\sin(k)}{2^k}$: Tuto řadu bychom neuměli prozkoumat přímo. Členy nejsou nezáporné, proto testy nefungují. Nemůžeme použít Leibnize, protože to není řada alternující. Nepomůže ani nutná podmínka, protože $a_k \to 0$.
Zkusíme tedy absolutní konvergenci a doufáme, že to vyjde kladně, ať máme nějaký závěr:
$\sum\bigl|\frac{\sin(k)}{2^k}\bigr| = \sum \frac{|\sin(k)|}{2^k} \le \sum \frac{1}{2^k}$, tohle konverguje, proto podle srovnávacího testu konverguje i $\sum\bigl|\frac{\sin(k)}{2^k}\bigr|$, tedy $\sum \frac{\sin(k)}{2^k}$ konverguje absolutně.

Příklad.
$\sum (-1)^k \frac{2^k}{k^3}$: absolutní: $\sum\bigl|(-1)^k \frac{2^k}{k^3}\bigr| = \sum \frac{2^k}{k^3}$, podílové kritérium: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 2\bigl(\frac{k}{k+1}\bigr)^3 \to 2 = \lambda > 1$, proto $\sum\bigl|(-1)^k \frac{2^k}{k^3}\bigr|$ diverguje, takže $\sum (-1)^k \frac{2^k}{k^3}$ nekonverguje absolutně. Nevíme ale, jestli náhodou nekonverguje, pak by konvergovala podmíněně.
Jenže $\frac{2^k}{k^3} \to \infty$, proto $a_k = (-1)^k \frac{2^k}{k^3} \not\to 0$, takže řada diverguje.

Věta.
Uvažujme řadu $\sum\limits_{k=2n_0}^{\infty} a_k$.
Jestliže $\sum a_k$ konverguje absolutně, pak konvergují i $\sum a_{2k}$ a $\sum a_{2k+1}$ a
$\sum\limits_{k=2n_0}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_{2k} + \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_{2k+1}$.

Neplatí pro neabsolutní konvergenci, viz $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

Věta.
Uvažujme řadu $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$.
Jestliže $\sum a_k$ konverguje absolutně, pak pro každou volbu znamének $\varepsilon_k = \pm 1$ konverguje i $\sum \varepsilon_k a_k$.
Jestliže $\sum a_k$ konverguje neabsolutně, pak existuje volba znamének $\varepsilon_k = \pm 1$, aby $\sum \varepsilon_k a_k = \infty$.

Definice.
Uvažujme řadu $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$.

Přerovnání $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ je řada $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_{\pi(k)}$, kde π je libovolná permutace $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$, tj. bijekce $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\} \subset \mathbb{Z}$ na $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$.

Věta.
Uvažujme řadu $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$.
Jestliže $\sum a_k$ konverguje absolutně, pak konvergují i všechna její přerovnání $\sum a_{\pi(k)}$ a platí $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_{\pi(k)} = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$.
Jestliže $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně, pak $\forall c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existuje její přerovnání takové, že $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_{\pi(k)} = c$.

Řady v komplexním oboru.
Teorie je obdobná, což plyne z následujícího.

Věta.
Nechť a_k jsou komplexní čísla.
Pak $a_k \to A$ právě tehdy když $\mathrm{Re}(a_k) \to \mathrm{Re}(A)$ a $\mathrm{Im}(a_k) \to \mathrm{Im}(A)$.
Podobně řada $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když konvergují $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \mathrm{Re}(a_k)$ a $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \mathrm{Im}(a_k)$.
Pak také $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k = \Big(\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \mathrm{Re}(a_k)\Big) + j\Big(\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \mathrm{Im}(a_k)\Big)$.

Takto se dostaneme k běžné konvergenci. Výrazně silnou zbraní je v komplexním oboru pojem absolutní konvergence, který umožňuje přejít od řad komplexních k řadám s nezápornými členy, přičemž je zase silnější než obyčejná kovergence.

1. Posloupnosti a řady funkcí

Definice.
Posloupnost funkcí je uspořádaná množina $\{f_k\}_{k=n_0}^{\infty} = \{f_{n_0}, f_{n_0+1}, f_{n_0+2}, \dots\}$, kde f_k jsou funkce.
Poznámka: Je-li dána posloupnost funkcí $\{f_k\}_{k=n_0}^{\infty}$ a $x \in \bigcap D(f_k)$, pak $\{f_k(x)\}$ je standardní posloupnost reálných (komplexních) čísel.

Definice.
Nechť $\{f_k\}_{k\geq n_0}$, f jsou funkce na množině M.
Řekneme, že $\{f_k\}$ **konverguje (bodově)** k f na M, značeno $f_k \to f$ nebo $f = \lim\limits_{k\to\infty}(f_k)$, jestliže $\forall x \in M$: $\lim\limits_{k\to\infty}\big(f_k(x)\big) = f(x)$.

Příklad.

Uvažujme $f_k(x) = \operatorname{arctg}(kx)$. Pak $\lim\limits_{k\to\infty}\big(f_k(x)\big) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$

Definice.
Nechť $\{f_k\}_{k\geq n_0}$, f jsou funkce na množině M.
Řekneme, že $\{f_k\}$ **konverguje stejnoměrně** k f na M, značeno $f_k \rightrightarrows f$, jestliže $\forall\varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall k \geq N_0 \forall x \in M$: $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$.

Věta.
Nechť $f_k \rightrightarrows f$ na M.
(i) Jsou-li f_k spojité na M, pak je tam spojitá také f.
(ii) Mají-li f_k spojitou derivaci na M a $\{f_k'\}$ konverguje stejnoměrně na M, pak má také f derivaci na M a $f' = \lim\limits_{k\to\infty}(f_k')$ na M.
(iii) Jsou-li funkce f_k spojité a mají primitivní funkci na M, pak také f má primitivní funkci na M a $\int_a^x f\,dx = \lim\limits_{k\to\infty}\big(\int_a^x f_k\,dx\big)$ pro $\overline{a,x} \subseteq M$.

Definice.
Funkční řada je symbol $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f_k = f_{n_0} + f_{n_0+1} + f_{n_0+2} + \dots$, kde f_k jsou funkce.
Poznámka: Je-li dána funkční řada $\sum f_k$ a $x \in \bigcap D(f_k)$, pak $\sum f_k(x)$ je standardní řada reálných (komplexních) čísel.

Definice.
Uvažujme funkční řadu $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f_k$.
Obor konvergence této řady je množina $\big\{x \in \bigcap D(f_k);\ \sum f_k(x) \text{ konverguje}\big\}$. Definicí $f(x) = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f_k(x)$ tak vzniká funkce f na M zvaná **součet řady**, značíme $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f_k = f$.
Obor absolutní konvergence této řady je množina $\big\{x \in \bigcap D(f_k);\ \sum f_k(x) \text{ konv. absolutně}\big\}$.
Řekneme, že tato řada **konverguje stejnoměrně** k f na M, značeno $\sum f_k \rightrightarrows f$ na M, jestliže posloupnost částečných součtů $\Big\{\sum\limits_{k=n_0}^{N} f_k(x)\Big\}$ konverguje stejnoměrně k f na M.

Věta.
Uvažujme řady funkcí $\sum f_k$ a $\sum g_k$.
Jestliže $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f_k = f$ na M a $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} g_k = g$ na M, pak $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} (af_k + bg_k) = af + bg$ na M.
Totéž platí pro stejnoměrnou konvergenci.

Věta. (Weierstrassovo kritérium)
Nechť f_k pro $k \geq n_0$ jsou funkce na M. Nechť $a_k \geq 0$ splňují $\forall x \in M \forall k \geq n_0$: $|f_k(x)| \leq a_k$.
Jestliže $\sum a_k$ konverguje, pak $\sum f_k$ konverguje stejnoměrně na M.

Příklad.
$\sum x^k = \frac{1}{1-x}$ na $(-1, 1)$, ale konvergence není stejnoměrná. Bude stejnoměrná, pokud se omezíme na $\langle -\varrho, \varrho \rangle$ pro $\varrho \in (0, 1)$.

Věta.
Nechť $\sum f_k \rightrightarrows f$ na M.
(i) Jsou-li všechny f_k spojité na M, pak je tam spojitá také f.
(ii) Mají-li všechny f_k derivaci na M a $\sum f_k'$ konverguje stejnoměrně na M, pak také f má derivaci na M a $f' = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f_k'$ na M.
(iii) Jsou-li všechny f_k spojité a mají primitivní funkci na M, pak také f má primitivní funkci na M a $\int_a^x f\,dx = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \int_a^x f_k\,dx$ pro $\overline{a, x} \subseteq M$.

Nic z toho neplatí obecně pro obyčejnou (bodovou) konvergenci.

2. Mocninné řady

Definice.
Nechť $z_0 \in \mathbb{R}$.

Mocninná řada se středem v bodě a je funkční řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, kde $a_k \in \mathbb{R}$.

Věta.
Uvažujme mocninnou řadu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$.

Existuje $r \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ takové, že $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ konverguje absolutně na $U_r(a) = (a-r, a+r)$ a diverguje pro $|x-a| > r$. Navíc platí $r = \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}(\sqrt[k]{|a_k|})}$.

Poznámka: Také máme $r = \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}(\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|})}$, pokud tato limita existuje.

Poznámka: Řada vždy konverguje (absolutně) v $x = a$.

Definice.
Uvažujme mocninnou řadu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$.

Číslo r s vlastnostmi z předchozí věty se nazývá **poloměr konvergence** této řady.

Příklad.
$\sum \frac{(2x)^k}{k\,3^k} = \sum \frac{2^k}{k\,3^k}(x-0)^k$, proto $a = 0$.
Absolutní konvergence limitním odmocninovým testem: $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2|x|}{3\sqrt[k]{k}} \to \frac{2|x|}{3} = \varrho$.
$\varrho < 1 \iff \frac{2|x|}{3} < 1 \iff |x| < \frac{3}{2}$, proto poloměr konvergence $r = \frac{3}{2}$. Krajní body $a \pm r = \pm\frac{3}{2}$:
$x = \frac{3}{2}$: $\sum \frac{1}{k} = \infty$.
$x = -\frac{3}{2}$: $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ konverguje.
Obor konvergence $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, obor absolutní konvergence $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Příklad.
$\sum \frac{(2x-4)^k}{k!} = \sum \frac{2^k}{k!}(x-2)^k$, proto $a = 2$.
Absolutní konvergence limitním podílovým testem: $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{2}{k+1}|x-2| \to 0 = \lambda$.
$\lambda < 1$ je pravda $\forall x$, proto poloměr konvergence $r = \infty$.
Obor konvergence a obor absolutní konvergence $\mathbb{R}$.

Příklad.
$\sum k^k(2x+3)^k = \sum k^k 2^k\big(x - \big(-\frac{3}{2}\big)\big)^k$, proto $a = -\frac{3}{2}$.
Absolutní konvergence limitním odmocninovým testem:
$\sqrt[k]{|a_k|} = 2k\big|x + \frac{3}{2}\big| \to \begin{cases} \infty, & x \neq -\frac{3}{2}; \\ 0, & x = -\frac{3}{2} \end{cases} = \varrho.$
$\varrho < 1 \iff x = -\frac{3}{2}$, proto poloměr konvergence $r = 0$.
Obor konvergence a obor absolutní konvergence $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

Věta.
Nechť $a \in \mathbb{R}$, nechť $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = f$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k = g$ mají pol. konvergence r_f a r_g.

(i) Pak $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (aa_k + bb_k)(x-a)^k = af + bg$ má poloměr konvergence $r = \min(r_f, r_g)$.

(ii) Řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Big(\sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\Big)(x-a)^k = \Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k\Big) \cdot \Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k\Big) = f \cdot g$ má poloměr konvergence $r = \min(r_f, r_g)$.

Věta.
Nechť $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = f$ má poloměr konvergence $r > 0$.

(i) Pro libovolné $\varrho \in (0, r)$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k \rightrightarrows f$ na $U_\varrho(a)$.

(ii) f je spojitá, má derivaci $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, a_k(x-a)^{k-1}$ s poloměrem konvergence r a primitivní funkci $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$ s poloměrem konvergence r.

Důsledek.
Nechť $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ na $U_r(a)$.

Pak na $U_r(a)$ máme pro $n \in \mathbb{N}$ i derivace $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)\, a_k(x-a)^{k-n}$.

Poznámka: V bodech $a \pm r$ se může stát cokoliv, nemáme větu, která by šla až do krajních bodů, takže tam můžeme ztratit vlastnosti (třeba konvergenci).

Příklad.
$f(x) = -\ln(1-x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1}$ konverguje na $\langle -1, 1)$, ale $f'(x) = \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ konverguje jen na $(-1, 1)$.

Poznámka: Je-li $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ na $U_r(a)$, pak $f^{(n)}(a) = n!\, a_n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.

Definice.
Nechť má f derivace všech řádů v a.

Definujeme **Taylorovu řadu** funkce f se středem v bodě a jako $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Proces nalezení této řady se nazývá **rozvoj dané funkce v mocninnou/Taylorovu řadu (se středem a)**.

Důsledek. **(jednoznačnost rozkladu)**
Jestliže $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ na $U_r(a)$, pak ta řada musí být nutně Taylorova.

Proces nalezení této řady se nazývá **rozvoj dané funkce v mocninnou/Taylorovu řadu (se středem a)**. Částečný součet je Taylorův polynom, takže víme vše, dokonce i rozdíl mezi T_n a f podle Lagrange.

Příklad.
$e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ pro $x \in I\!R$.

Důkaz: Označíme $T_N = \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{x^k}{k!}$. Pak dle Lagrangeova tvaru zbytku $e^x - T_N(x) = R_N(x)$, kde $R_N(x) = \frac{[e^x]^{(N+1)}(c)}{(N+1)!} x^{N+1}$. Zvolme pevné x a odhadujme $|R_N(x)| \leq \frac{1}{(N+1)!} \max\limits_{x \in \overline{0x}} |e^x||x|^{N+1}$, tedy pro $x \geq 0$ máme $|R_N(x)| \leq \frac{e^x |x|^{N+1}}{(N+1)!}$, pro $x \leq 0$ máme $|R_N(x)| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$. Každopádně $R_N(x) \to 0$, tedy $T_N(x) \to e^x$.

Věta.
Nechť funkce f má derivace všech řádů na nějakém $U_r(a)$ a $\exists M > 0$ takové, že $|f^{(k)}(a)| \leq M$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a $x \in U_r(a)$. Pak pro $x \in U_r(a)$ je $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Fakt.
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots,\ x \in (-1,1);$$
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,\ x \in \mathbb{R};$$
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,\ x \in \mathbb{R};$$
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,\ x \in \mathbb{R};$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,\ x \in (-1,1\rangle;$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)}{3!} x^3 + \ldots,\ x \in (-1,1).$$
Zde $\dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+2) \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$.

Další funkce děláme pomocí těchto a algebry, substituce atd.

Příklad.
Rozviňte $f(x) = (x+3)e^{4x}$ v řadu se středem $a = 0$:
$$(x+3)e^{4x} = xe^{4x} + 3e^{4x} = \langle\!\langle y = 4x \rangle\!\rangle = x \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(4x)^k}{k!} + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(4x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{4^k}{k!} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{3 \cdot 4^k}{k!} x^k$$
$$= \langle\!\langle k+1 \mapsto k^* \rangle\!\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{4^{k-1}}{(k-1)!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{3 \cdot 4^k}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{k 4^{k-1}}{k!} x^k + 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{3 \cdot 4^k}{k!} x^k$$
$$= 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(k+12)4^{k-1}}{k!} x^k,\ x \in \mathbb{R}.$$

Příklad.
Rozviňte $f(x) = \frac{1}{1+3x^2}$ v řadu se středem $a = 0$:
$$\tfrac{1}{1+3x^2} = \tfrac{1}{1-(-3x^2)} = \langle\!\langle y = -3x^2,\ |y| < 1 \rangle\!\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (-3x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 3^k x^{2k},\ |x| < \tfrac{1}{\sqrt{3}}.$$

Příklad.
Rozviňte $f(x)=(x-1)\sin(\pi x)$ v řadu se středem $a=-1$:

$$\begin{aligned}(x-1)\sin(\pi x)&=(x-(-1)-2)\sin(\pi(x-(-1)-1))\\ &=(x-(-1))\sin(\pi(x-(-1))-\pi)-2\sin(\pi(x-(-1))-\pi)\\ &=-(x+1)\sin(\pi(x+1))+2\sin(\pi(x+1))=\langle\!\langle y=\pi(x+1)\rangle\!\rangle\\ &=-(x+1)\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{[\pi(x+1)]^{2k+1}}{(2k+1)!}+2\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{[\pi(x+1)]^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{2\pi^{2k+1}}{(2k+1)!}(x-(-1))^{2k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!}(x-(-1))^{2k+2},\ x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Příklad.
Rozviňte $f(x)=\ln(1+x)$ v řadu se středem $a=0$:

$$\begin{aligned}\ln(1+x)&=\int\tfrac{dx}{x+1}=\int\tfrac{1}{1-(-x)}\,dx=\langle\!\langle y=-x,\ |y|<1\rangle\!\rangle=\int\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int(-1)^kx^k\,dx\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\tfrac{x^{k+1}}{k+1}+C=\langle\!\langle k+1\mapsto k^*\rangle\!\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\tfrac{x^k}{k}+C;\end{aligned}$$

Kolik je C? Dosadíme $x=0$: $\ln(1+0)=\sum 0+C$, tedy $C=0$.
Proto $\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$, $|x|<1$.
Funguje i pro $x=1$, ne pro $x=-1$.

Příklad.
Rozviňte $f(x)=\frac{1}{(2x-5)^2}$ v řadu se středem $a=1$:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{(2x-5)^2}&=\big[-\tfrac12\,\tfrac{1}{2x-5}\big]'=-\tfrac12\big[\tfrac{1}{2(x-1)-3}\big]'=\tfrac16\big[\tfrac{1}{1-\frac23(x-1)}\big]'=\langle\!\langle y=\tfrac23(x-1),\ |y|<1\rangle\!\rangle\\ &=\tfrac16\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tfrac23(x-1)\big)^k\Big]'=\tfrac16\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tfrac23\big)^k[(x-1)^k]'=\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac16\big(\tfrac23\big)^kk(x-1)^{k-1}=\langle\!\langle k-1\mapsto k^*\rangle\!\rangle\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{2^k}{3^{k+2}}(k+1)(x-1)^k,\ |x-1|<\tfrac32.\end{aligned}$$

Mocninné řady v komplexním oboru.
Komplexní ∞, $\frac{1}{\infty}=0$, $\frac{1}{0}=\infty$, neexistuje e^{∞}!
Okolí v komplexní rovině: $U_\varepsilon(z_0)=\{z\in\mathbb{C};\ |z-z_0|<\varepsilon\}$, $U_\varepsilon(\infty)=\{z\in\mathbb{C};\ |z|>1/\varepsilon\}$.
Definice, které se dělají přes okolí, jsou v $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ stejné (limita, součet řady). Proto i věty, které používají okolí a nepoužívají porovnávání mezi prvky (mohou používat porovnávání mezi absolutními hodnotami prvků), platí v komplexním oboru, například podílové a odmocninové testy konvergence, když se aplikují na absolutní konvergenci.
I mocninné řady pak fungují stejně, včetně toho, že např. je-li r poloměr konvergence komplexní mocninné řady, pak tato konverguje absolutně na $U_r(z_0)=\{z\in\mathbb{C};\ |z-z_0|<r\}$.

3. Fourierovy řady

Definice.

Trigonometrická řada je řada $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\bigl[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\bigr]$.

Trigonometrický polynom stupně N je $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{N}\bigl[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\bigr]$.

Poznámka: Jsou to speciální případy **Fourierových řad**, budeme jim tak říkat. Které funkce se dají rozvinout ve Fourierovy řady?

Fakt.

Funkce $\sin(k\omega t)$, $\cos(k\omega t)$ jsou periodické s periodou $T=\frac{2\pi}{\omega}$.
Proto jsou i trigonomické polynomy a trigonomická řada (pokud konverguje) T-periodické.

Tedy pouze funkce periodické mohou být součtem Fourierovy řady. Máme-li takovou funkci, jaká řada je nejlepším kandidátem na rozvoj?

Věta.

Nechť $\omega>0$, $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Pak platí:

(i) $\int\limits_0^T \sin^2(k\omega t)\,dt=\int\limits_0^T \cos^2(k\omega t)\,dt=\frac{T}{2}$ pro $k\in\mathbb{N}$,

(ii) $\int\limits_0^T \sin(k\omega t)\sin(m\omega t)\,dt=\int\limits_0^T \cos(k\omega t)\cos(m\omega t)\,dt=0$ pro $k\neq m\in\mathbb{N}$,

(iii) $\int\limits_0^T \sin(k\omega t)\cos(m\omega t)\,dt=0$ pro $k,m\in\mathbb{N}$.

Remark on (i): $\int\limits_0^T \sin^2(k\omega t)\,dt=0$ and $\int\limits_0^T \cos^2(k\omega t)\,dt=T$ for $k=0$.

Věta.

Nechť f je T-periodická funkce, označme $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

Jestliže $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\bigl[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\bigr]\rightrightarrows f$ na $\langle 0,T\rangle$, pak

$a_k=\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt$ pro $k\in\mathbb{N}_0$ a $b_k=\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt$ pro $k\in\mathbb{N}$.

Poznámka: $a_0=\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt$.

Definice.

Nechť f je funkce, která je T-periodická a integrovatelná na $\langle 0,T\rangle$.

Definujeme její **Fourierovu řadu** jako $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\bigl[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\bigr]$, kde

$a_k=\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt$ pro $k\in\mathbb{N}_0$ a $b_k=\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt$ pro $k\in\mathbb{N}$.

Značíme $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\bigl[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\bigr]$.

Poznámka: Je-li funkce g periodická s T, pak $\forall a \in \mathbb{R}$ platí $\int\limits_0^T g(t)\,dt = \int\limits_a^{a+T} g(t)\,dt$. Toto se dá aplikovat na funkce a integrály ve vzorcích pro Furierovu transformaci, populární jsou například $a_k = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt$ pro $k \in \mathbb{N}_0$ a $b_k = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Definice.
Nechť f je funkce definovaná na intervalu $I = \langle a, a+T)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$.
Její **periodické prodloužení na** $\mathbb{R}$ definujeme jako funkci
$f(t) = f(t - kT)$ pro $t \in \langle a + kT, a + (k+1)T)$.
Poznámka: Vznikne funkce T-periodická na $\mathbb{R}$.

Definice.
Nechť f je funkce definovaná na intervalu $I = \langle a, a+T)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$.
Definujeme její Fourierovou řadu jako Fourierovu řadu jejího periodického prodloužení.

Příklad.
Fourierova řada funkce $f(t) = t^2$ na $\langle -1, 1)$. $T = 2$, $\omega = \pi$.

$a_0 = \frac{2}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,dt = \int\limits_{-1}^1 f(t)\,dt = \int\limits_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$.

$a_k = \frac{2}{2}\int\limits_{-1}^1 t^2\cos(k\pi t)\,dt = \frac{4\cos(k\pi)}{\pi^2 k^2} = \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2}$.

$b_k = \frac{2}{2}\int\limits_{-1}^1 t^2\sin(k\pi t)\,dt = 0$.

Proto $f \sim \frac{1}{3} + \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2}\cos(k\pi t)$.

Věta. (**Jordanovo kritérium implikované derivací**)
Nechť f je T-periodická funkce, která je po částech spojitá na nějakém intervalu I délky T, nechť má derivaci f' po částech spojitou na I.
Nechť $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^\infty \bigl[a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\bigr]$. Pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{N\to\infty}\Bigl(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \bigl[a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\bigr]\Bigr) = \tfrac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)].$$

Je-li navíc f spojitá na $\mathbb{R}$, pak $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^\infty \bigl[a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\bigr] \rightrightarrows f$.

Příklad.
Pro každé $t \in \langle -1, 1\rangle$ je $t^2 = \frac{1}{3} + \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2}\cos(k\pi t)$.

Použití pro $t = 0$ dá $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Použití pro $t = 1$ dá $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Definice.
Nechť f je funkce definovaná a spojitá na $\langle 0, L)$.
Definujeme její **sinovou řadu** jako Fourierovu řadu jejího lichého periodického rozšíření.
Definujeme její **kosinovou řadu** jako Fourierovu řadu jejího sudého periodického rozšíření.

Věta.
Nechť f je T-periodická funkce integrovatelná na $\langle 0,T)$, nechť $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

(i) Je-li f lichá, je $a_k = 0$ a $b_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt$.

(ii) Je-li f sudá, je $b_k = 0$ a $a_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt$.

Fakt.
Nechť f je funkce definovaná a spojitá na $\langle 0,L)$.

Její sinovou Fourierovu řadu lze získat jako Fourierovu řadu s $a_k = 0$, $b_k = \frac{2}{L}\int\limits_0^{L} f(t)\sin(k\omega t)\,dt$ a $\omega = \frac{\pi}{L}$.

Její kosinovou Fourierovu řadu lze získat jako Fourierovu řadu s $b_k = 0$, $a_k = \frac{2}{L}\int\limits_0^{L} f(t)\cos(k\omega t)\,dt$ a $\omega = \frac{\pi}{L}$.

Poznámka: Součtem sinové řady je $T = 2L$-periodické prodloužení f na lichou funkci. Součtem kosinové řady je $T = 2L$-periodické prodloužení f na sudou funkci. Oba součty je ovšem nutno modifikovat podle Jordanova kritéria.

Příklad.
$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0,1); \\ 0, & t \in \langle 1,2). \end{cases}$$
Fourierova řada: $T = 2$, $\omega = \pi$.

$a_0 = \frac{2}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,dt = \int\limits_0^1 dt = 1.$

$a_k = \frac{2}{2}\int\limits_0^1 \cos(k\pi t)\,dt = \big[\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\big]_0^1 = 0.$

$b_k = \frac{2}{2}\int\limits_0^1 \sin(k\pi t)\,dt = \big[-\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\big]_0^1 = \frac{1}{k\pi}[1-\cos(k\pi)] = \frac{1}{k\pi}[1-(-1)^k] = \begin{cases} 0, & k \text{ sudé}; \\ \frac{2}{k\pi}, & k \text{ liché}. \end{cases}$

Proto $f \sim \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi}[1-(-1)^k]\sin(k\pi t) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)\pi t).$

Sinová Fourierova řada: $L = 2$, $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $a_k = 0$.

$b_k = \frac{2}{2}\int\limits_0^1 \sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt = \big[-\frac{2}{k\pi}\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\big]_0^1 = \frac{2}{k\pi}[\cos(k\pi) - \cos\big(k\frac{\pi}{2}\big)].$

Proto $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}[(-1)^k - \cos\big(k\frac{\pi}{2}\big)]\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big).$

Kosinová Fourierova řada: $L = 2$, $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $b_k = 0$.

$a_0 = \frac{2}{2}\int\limits_0^1 dt = 1.$

$a_k = \frac{2}{2}\int\limits_0^1 \cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt = \big[\frac{2}{k\pi}\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\big]_0^1 = \frac{2}{k\pi}\sin\big(k\frac{\pi}{2}\big).$

Proto $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\sin\big(k\frac{\pi}{2}\big)\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big).$

Zde $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = (-1)^{k+1}\frac{2}{(2k+1)\pi}$, tedy $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{2}{(2k+1)\pi}\cos\big((2k+1)\frac{\pi}{2}t\big).$

Poznámka: Když je f T-periodická, pak je i její derivace f' T-periodická, ale neplatí to pro primitivní funkci $F(t) = \int\limits_0^t f(u)\,du$. Ta je T-periodická, pokud $\int\limits_0^T f(u)\,du = 0$, tj. $a_0 = 0$.

Věta.
Nechť f je T-periodická funkce, která je po částech spojitá na $\langle 0, T)$ a má po částech spojitou derivaci na $\langle 0, T)$. Nechť $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \bigl[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\bigr]$.

(i) $f' \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \bigl[-a_k \sin(k\omega t)k\omega + b_k \cos(k\omega t)k\omega\bigr] = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \bigl[b_k k\omega \cos(k\omega t) - a_k k\omega \sin(k\omega t)\bigr]$.

(ii) Je-li $\int\limits_0^T f(u)\,du = 0$ (tj. $a_0 = 0$), pak

$$F(t) = \int\limits_0^t f(u)\,du \sim \sum_{k=1}^{\infty} \bigl[a_k \sin(k\omega t)\tfrac{1}{k\omega} - b_k \cos(k\omega t)\tfrac{1}{k\omega}\bigr] = \sum_{k=1}^{\infty} \bigl[\tfrac{-b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) + \tfrac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t)\bigr].$$

Poznámka: Víme-li, že Fourierova řada konverguje k f na nějakém intervalu $\langle a, b\rangle$, pak bohužel nemůžeme říci, že by tam byla konvergence stejnoměrná. Na krajích intervalu totiž dochází k tzv. Gibbsově jevu.

Definice.
Nechť $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \bigl[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\bigr]$. Označme $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, najdeme φ_k tak, aby $b_k = A_k \cos(\varphi_k)$ a $a_k = A_k \sin(\varphi_k)$. Pak $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$.
Tuto řadu nazýváme **Fourierova řada v amplitudově-fázovém tvaru**.
Označme $c_0 = \frac{a_0}{2}$ a $c_k = \frac{1}{2}(a_k - j\,b_k)$, $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + j\,b_k)$ pro $k \in \mathbb{N}$. Pak $f \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t}$.
Tuto řadu nazýváme **Fourierova řada v komplexním tvaru**.

Poznámka: $\varphi_k = \operatorname{arctg}\bigl(\frac{a_k}{b_k}\bigr)$, popř. $\varphi_k = \operatorname{arccotg}\bigl(\frac{b_k}{a_k}\bigr)$, popř. posuny, viz převod z kartézských souřadnic na polární.

Fakt.
Platí $c_k = \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt$.

4. Aplikace řad

Příklad.
$y'' + y = \begin{cases} 1, & t \in \langle 2k, 2k+1); \\ 0, & t \in \langle 2k-1, 2k). \end{cases}$

Rozvineme pravou stranu $f = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k\pi} \sin(k\pi t)$.

Předpokládáme, že řešení lze nalézt ve tvaru $y = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)]$.

Dosadíme do rovnice a dostaneme
$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} [a_k(1-k^2\pi^2)\cos(k\pi t) + b_k(1-k^2\pi^2)\sin(k\pi t)] = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k\pi} \sin(k\pi t)$.

Porovnáním obou stran máme $a_0 = 1$, $a_k = 0$ pro $k \geq 1$ a $b_k = \frac{1-(-1)^k}{k\pi(1-k^2\pi^2)}$
a tedy $y = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k\pi(1-k^2\pi^2)} \sin(k\pi t)] = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi(1-(2k+1)^2\pi^2)} \sin((2k+1)\pi t)]$.

Příklad.
$y'' - x^3 y = 24x^2$ okolo $x_0 = 0$.

Napravo je mocninná řada s $x_0 = 0$, zkusíme hledat řešení ve tvaru $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Dosadíme do rovnice a dostaneme $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} - \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+3} = 24x^2$, tedy

$2a_2 + 6a_3 x_1 2a_4 x^2 + \sum\limits_{k=3}^{\infty} [a_{k+2}(k+1)(k+2) - a_{k-3}]x^k = 24x^2$.

Porovnáním obou stran máme $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 2$, dále rovnice $3{\cdot}5a_5 - a_0 = 0$, $5{\cdot}6a_6 - a_1 = 0$, $6 \cdot 7a_7 - a_2 = 0$, $7 \cdot 8a_8 - a_3 = 0$, $8 \cdot 9a_9 - a_4 = 0$, $9 \cdot 10a_{10} - a_5 = 0$, $10 \cdot 11a_{11} - a_6 = 0$, atd.
Zvolíme $a_0 = a$, $a_1 = b$, pak $a_5 = \frac{a}{20}$, $a_6 = \frac{b}{30}$, $a_7 = a_8 = 0$, $a_9 = \frac{1}{36}$, $a_{10} = \frac{a}{1800}$, $a_{11} = \frac{b}{3300}$, $a_{12} = a_{13} = 0$, atd
a tedy $y(x) = a + bx + 2x^4 + \frac{a}{20}x^5 + \frac{b}{30}x^6 + \frac{1}{36}x^9 + \frac{a}{1800}x^{10} + \frac{b}{3300}x^{11} + \dots$

Příklad.
$\lim\limits_{x\to 0}\bigl(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\bigr) = \lim\limits_{x\to 0}\bigl(\frac{1-[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\dots]}{x^2}\bigr) = \lim\limits_{x\to 0}\bigl(\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\dots}{x^2}\bigr) = \lim\limits_{x\to 0}\bigl(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \dots\bigr) = \frac{1}{2}$.

Příklad.
$\int \frac{1}{x}\sin(x)\,dx = \int \frac{1}{x} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}\,dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int x^{2k}\,dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C$
$\quad = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} x^{2k+1} + C$.