Laplaceova transformace

Definice.
Pro $f\colon \langle 0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ definujeme její **Laplaceovu transformaci** $\mathcal{L}\{f(t)\}$ jako
$$\mathcal{L}\{f(t)\}\colon p \mapsto \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,$$
pokud toto konverguje alespoň pro jedno $p \in \mathbb{R}$.
Značení: $\mathcal{L}\{f(t)\}$, $\mathcal{L}\{f\}$, F, alternativně $f(t) \mathrel{\widehat{=}} F(p)$.

Příklad.

$\mathcal{L}$ z $f(t) = e^{\alpha t}$ pro $t \geq 0$ je funkce F daná vzorcem $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \dfrac{1}{p-\alpha}$ pro $p > \alpha$.

Chceme-li aplikovat $\mathcal{L}$ na funkce f definované na větší množině, například na $\mathbb{R}$, pak je budeme považovat za rovné nule pro $t < 0$.

Definice.
Heavisideova funkce je definována $H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Fakt.
Nechť f je funkce na $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Pak $f(t)H(t-a) = \begin{cases} f(t), & t \geq a; \\ 0, & t < a. \end{cases}$

Úmluva: Je-li f funkce zadaná vzorcem a napíšeme $\mathcal{L}\{f(t)\}$, pak tím automaticky rozumíme $\mathcal{L}\{f(t)H(t)\}$.

Příklad.
Předchozí příklad lze zapsat jako $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{p-\alpha}$ nebo třeba $e^{\alpha t} \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{p-\alpha}$.

Příklad.
$\mathcal{L}\{e^{t^2}\} = \mathcal{L}\{e^{t^2}H(t)\}$ neexistuje.

Definice.
Řekneme, že funkce f je na intervalu I **po částech spojitá**, jestliže existují $x_0 < x_1 < \ldots \in \overline{I}$ takové, že $\{x_k\}$ je buď konečná nebo posloupnost jdoucí do nekonečna pro $x_k \to \infty$, $\overline{I} = \bigcup \langle x_{k-1}, x_k\rangle$ a pro každé $k = 1, 2, \ldots$ je f spojitá na (x_{k-1}, x_k) a má jednostranné limity $f({x_{k-1}}^+)$, $f({x_k}^-)$.
Řekneme, že funkce f je **nejvýše exponenciálního růstu**, jestliže $\exists \alpha, M > 0$ takové, že $\forall t$: $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$.

Definice.
Definujeme prostor $\mathcal{L}_0$ jako
$$\mathcal{L}_0 = \{f\colon \langle 0,\infty) \mapsto \mathbb{R};\ f \text{ je nejvýše exponenciálního růstu a po částech spojitá na } \langle 0,\infty)\}.$$

Věta.
Jestliže $f \in \mathcal{L}_0$, pak existuje $\mathcal{L}\{f\}$ na nějakém (p_f, ∞).
Navíc $\lim\limits_{p\to\infty} \big(\mathcal{L}\{f\}(p)\big) = 0$.

Prostor $\mathcal{L}_0$ obsahuje například $e^{\alpha t}$, t^n pro $n \geq 0$ a taky tam leží všechny (po částech) spojité omezené funkce. Pro většinu funkcí počítáme Laplaceovu transformaci algoritmicky.

1. Výpočet Laplaceovy transformace

Věta. (**slovník**)
(i) $\forall\alpha\in\mathbb{R}$: $e^{\alpha t}\in\mathcal{L}_0$ a $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}=\frac{1}{p-\alpha}$, $p>\alpha$;
(ii) $\forall n\in\mathbb{N}_0$: $t^n\in\mathcal{L}_0$ a $\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{p^{n+1}}$, $p>0$;
(iii) $\forall\omega\in\mathbb{R}$: $\sin(\omega t)\in\mathcal{L}_0$ a $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $p\in\mathbb{R}$;
(iv) $\forall\omega\in\mathbb{R}$: $\cos(\omega t)\in\mathcal{L}_0$ a $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}=\frac{p}{p^2+\omega^2}$, $p\in\mathbb{R}$.

Věta. (**linearita**)
Nechť $f,g\in\mathcal{L}_0$. Pak $\forall a,b\in\mathbb{R}$: $af+bg\in\mathcal{L}_0$ a $\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}$.

Věta. (**gramatika**)
Nechť $f\in\mathcal{L}_0$. Pak platí:
(i) (změna měřítka) $\forall a>0$: $f(at)\in\mathcal{L}_0$ a
$$\mathcal{L}\{f(at)\}=\tfrac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}\big|_{p/a};$$
(ii) (posun v obraze) $\forall a\in\mathbb{R}$: $e^{at}f(t)\in\mathcal{L}_0$ a
$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\big|_{p-a};$$
(iii) (posun ve vzoru) $\forall a>0$: $f(t-a)H(t-a)\in\mathcal{L}_0$ a
$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}=e^{-ap}\mathcal{L}\{f(t)H(t)\};$$
(iv) (derivace obrazu) $\forall n\in\mathbb{N}$: $t^nf(t)\in\mathcal{L}_0$ a
$$\mathcal{L}\{t^nf(t)\}=(-1)^n\tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\mathcal{L}\{f(t)\};$$
(v) (integrace obrazu) Pokud $\lim\limits_{t\to 0^+}\big(\frac{f(t)}{t}\big)$ konverguje, pak $\frac{f(t)}{t}\in\mathcal{L}_0$ a
$$\mathcal{L}\big\{\tfrac{1}{t}f(t)\big\}=\int\limits_p^\infty\mathcal{L}\{f(t)\}(q)\,dq.$$
(vi) (derivace vzoru) Jestliže $f^{(n)}\in\mathcal{L}_0$, pak
$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}=p^n\mathcal{L}\{f(t)\}(p)-p^{n-1}f(0^+)-p^{n-2}f'(0^+)-\ldots-pf^{(n-2)}(0^+)-f^{(n-1)}(0^+);$$
(vii) (integrace vzoru) $\int\limits_0^t f(s)\,ds\in\mathcal{L}_0$ a
$$\mathcal{L}\big\{\int_0^t f(s)\,ds\big\}=\tfrac{1}{p}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Poznámka: V praxi je místo (iii) lepší $\mathcal{L}\{f(t)H(t-a)\}=e^{-ap}\mathcal{L}\{f(t+a)H(t)\}$.

Příklad.
$\mathcal{L}\{t\,e^{3t}\}=-[\mathcal{L}\{e^{3t}\}]'=-\big[\frac{1}{p-3}\big]'=\frac{1}{(p-3)^2}$.
$\mathcal{L}\{t\,e^{3t}\}=\mathcal{L}\{e^{3t}t\}=\mathcal{L}\{t\}\big|_{p-3}=\frac{1}{p^2}\big|_{p-3}=\frac{1}{(p-3)^2}$.
$\mathcal{L}\big\{\frac{\sin(t)}{t}\big\}=\int_p^\infty\mathcal{L}\{\sin(t)\}(q)\,dq=\int_p^\infty\frac{1}{q^2+1}\,dq=\big[\operatorname{arctg}(q)\big]_p^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(p)$.
Poznámka: $\frac{\cos(t)}{t}\notin\mathcal{L}_0$.
$\mathcal{L}\big\{\sin(2t)H\big(t-\frac{\pi}{2}\big)\big\}=e^{-\frac{\pi}{2}p}\mathcal{L}\big\{\sin\big(2\big(t+\frac{\pi}{2}\big)\big)\big\}=e^{-\frac{\pi}{2}p}\mathcal{L}\{\sin(2t+\pi)\}$
$\quad=e^{-\frac{\pi}{2}p}\mathcal{L}\{-\sin(2t)\}=-\frac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+4}$.

Definice.
Konečný impuls je libovolná funkce definovaná na $\langle 0,\infty)$, která je nenulová jen na nějakém omezeném uzavřeném intervalu.

Definice.
Nechť $M\subset\mathbb{R}$. Definujeme **charakteristickou funkci** M jako $\chi_M=\begin{cases}1, & x\in M;\\ 0, & x\notin M.\end{cases}$

Fakt.
Nechť M je podmnožina $\mathbb{R}$, f je funkce na $\mathbb{R}$. Pak $f(t)\chi_M = \begin{cases} f(t), & t \in M; \\ 0, & t \notin M. \end{cases}$

Fakt.
Nechť $a < b \in \mathbb{R}$. Pak $\chi_{\langle a,b)} = H(t-a) - H(t-b)$.

Příklad.
Laplaceova transformace jednoho kopečku sinu $2t$:
$\mathcal{L}\big\{\sin(2t)\big[H(t) - H\big(t - \frac{\pi}{2}\big)\big]\big\} = \mathcal{L}\{\sin(2t)\} - \mathcal{L}\big\{\sin(2t)H\big(t - \frac{\pi}{2}\big)\big]\big\} = \frac{2}{p^2+4} + \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+4}$.

Věta. (o **periodické** funkci)
Nechť f je funkce T-periodická na $\langle 0, \infty)$. Označme jednu periodu jako $f_T = f \cdot \chi_{\langle 0,T)}$. Pak $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{\mathcal{L}\{f_T(t)\}}{1 - e^{-pT}}$.

Příklad.

$$\mathcal{L}\{|\sin(2t)|\} = \frac{\mathcal{L}\{f_T(t)\}}{1-e^{-p\pi}} = \frac{\mathcal{L}\{\sin(2t)[H(t)-H(t-\frac{\pi}{2})]\}}{1-e^{-\pi p}} = \frac{\frac{2}{p^2+4} + \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+4}}{1 - e^{-\pi p}} = \frac{2}{p^2+4}\,\frac{1+e^{-\frac{\pi}{2}p}}{1-e^{-\pi p}}$$
$$= \frac{2}{p^2+4}\,\frac{1+e^{-\frac{\pi}{2}p}}{(1-e^{-\frac{\pi}{2}p})(1+e^{-\frac{\pi}{2}p})} = \frac{2}{p^2+4}\,\frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{2}p}}.$$

2. Inverzní Laplaceova transformace

Problém s prostotou.

Věta.
Pokud $f, g \in \mathcal{L}_0$ mají $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$ na nějakém $\langle p_0, \infty)$, pak $f = g$ až na spočetnou množinu izolovaných bodů.
Jestliže jsou navíc f a g všude spojité zprava, pak $f = g$.

Důsledek.
Uvažujme vektorový prostor $V = \{f \in \mathcal{L}_0;\ f \text{ spojitá zprava na } \mathbb{R}_0^+\}$. Na tomto prostoru je Laplaceova transformace prostá, můžeme tedy uvažovat inverzi $\mathcal{L}^{-1}$.

Věta. (**slovník** pro $\mathcal{L}^{-1}$)
$\mathcal{L}^{-1}\big\{\frac{1}{p-\alpha}\big\} = e^{\alpha t}$, $\mathcal{L}^{-1}\big\{\frac{1}{p^n}\big\} = \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$, $\mathcal{L}^{-1}\big\{\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\big\} = \sin(\omega t)$, $\mathcal{L}^{-1}\big\{\frac{p}{p^2+\omega^2}\big\} = \cos(\omega t)$.

Věta. (**gramatika** pro $\mathcal{L}^{-1}$)
(0) $\mathcal{L}^{-1}$ je lineární;
(1) $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-ap}F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}\big|_{t-a} \cdot H(t-a)$;
(2) $\mathcal{L}^{-1}\{F(p-a)\} = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$;
(3) $\mathcal{L}^{-1}\{F(ap)\} = \frac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}\big|_{t/a}$;
(4) $\mathcal{L}^{-1}\{F'(p)\} = -t\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$;
(5) $\mathcal{L}^{-1}\{pF(p)\} = \big[\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}\big]' + \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}(0^+)$.

Příklad.

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{pe^{-\pi p}}{p^2+1}\Big\} = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{p}{p^2+1}\Big\}\Big|_{t-\pi}H(t-\pi) = \cos(t)\Big|_{t-\pi}H(t-\pi) = \cos(t-\pi)H(t-\pi)$$
$$= -\cos(t)H(t-\pi) = \begin{cases} 0, & t \in \langle 0, \pi); \\ -\cos(t), & t \geq \pi. \end{cases}$$

Věta.
Je-li $F(p)$ ryzí racionální lomená funkce, pak existuje $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ a lze ji najít rozkladem na parciální zlomky.

3. Laplaceova transformace a diferenciální rovnice

Řešení diferenciálních rovnic (Cauchyho úlohy) pomocí LT: Zlaplasit rovnici, vyřešit vzniklou algebraickou rovnici, odlaplasit.

Příklad.
$\ddot{x} - x = \begin{cases} 2, & t \in \langle 0,1); \\ 0, & \text{jinde} \end{cases} = 2\chi_{\langle 0,1)}, \qquad x(0^+) = \dot{x}(0^+) = 0.$
Označíme $\mathcal{L}\{x\} = X$, pak $[p^2X - 0p - 0] - X = \mathcal{L}\{2[H(t) - H(t-1)]\}$, $(p^2-1)X = \frac{2}{p} - e^{-p}\frac{2}{p}$,
tedy $X(p) = \frac{2}{(p^2-1)p} - e^{-p}\frac{2}{(p^2-1)p} = \big(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p}\big) - e^{-p}\big(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p}\big)$,
proto $x(t) = e^t + e^{-t} - 2 - (e^t + e^{-t} - 2)\big|_{t-1} H(t-1) = e^t + e^{-t} - 2 - (e^{t-1} + e^{1-t} - 2)H(t-1)$
$= \begin{cases} e^t + e^{-t} - 2, & t \in \langle 0,1); \\ e^t(1-e^{-1}) + e^{-t}(1-e), & t \geq 1 \end{cases}$
nebo $x(t) = 2\cosh(t) - 2 - (2\cosh(t-1) - 2)H(t-1) = \begin{cases} 2\cosh(t) - 2, & t \in \langle 0,1); \\ 2\cosh(t) - 2\cosh(t-1), & t \geq 1. \end{cases}$

Nalezení obecného řešení pomocí LT: Dvě možnosti.
1) Zvolit nulové Cauchyho podmínky, najít jedno partikulární řešení pomocí LT, přičíst k tomu obecné homogenní řešení nalezené nejspíše přes charakteristická čísla.
2) Zvolit obecné Cauchyho podmínky $y(0^+) = a$ atd., vyřešit úlohu pomocí LT, vyjde řešení s parametry, tedy obecné.

Příklad.
Obecné řešení $\dot{x} + 9\int\limits_0^t x(u)\,du = 0$.
Volba $x(0^+) = a$, pak $pX - a + 9\frac{1}{p}X = 0$, $X(p) = \frac{ap}{p^2+9}$, $x(t) = a\cos(3t)$, $t \geq 0$.

Pomocí LT se dají řešit i soustavy.

Příklad.
$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \end{aligned}, \qquad y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1.$
Označíme $\begin{aligned} \mathcal{L}\{y_1\} &= Y_1 \\ \mathcal{L}\{y_1\} &= Y_1 \end{aligned}$, pak $\begin{aligned} pY_1 - 1 &= 2Y_1 + Y_2 \\ pY_2 - 1 &= Y_1 + 2Y_2 \end{aligned}$, tedy $\begin{aligned} (p-2)Y_1 - Y_2 &= 1 \\ -Y_1 + (p-2)Y_2 &= 1 \end{aligned}$, odtud (eliminace, Kramer) $Y_1(p) = \frac{1}{p-3}$, $Y_2(p) = \frac{1}{p-3}$, proto $y_1(x) = y_2(x) = e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Definice.
Nechť f,g jsou funkce definované na $\mathbb{R}$. Definujeme jejich **konvoluci** jako funkci $f * g$ na $\mathbb{R}$ danou $(f*g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\,ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,ds$.

Jestliže jsou f,g nulové na $(-\infty,0)$, např. pro $f,g \in \mathcal{L}_0$, pak $(f*g)(t) = \int\limits_0^t f(t-s)g(s)\,ds$.

Fakt.
$f * g = g * f$, $f * (g * h) = (f * g) * h$, $a(f * g) = (af) * g$, $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Věta.
Nechť $f, g \in \mathcal{L}_0$. Pak $f * g \in \mathcal{L}_0$ a $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$.
Odtud $\mathcal{L}^{-1}\{F \cdot G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} * \mathcal{L}^{-1}\{G\}$.

Příklad.
$y' + \int\limits_0^t \cosh(t-u)y(u)\,du = e^{-t}, \qquad y(0^+) = 0.$
Je to $y'(t) + \cosh(t) * y(t) = e^{-t}$, tedy $pY - 0 + \mathcal{L}\{\cosh(t)\} \cdot Y = \frac{1}{p+1}$, zde
$\mathcal{L}\{\cosh(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\big) = \frac{p}{p^2-1}$, proto
$pY + \frac{p}{p^2-1}Y = \frac{1}{p+1}$, $p^3 Y = p - 1$, $Y(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3}$, proto $y(t) = t - \frac{1}{2}t^2$, $t \geq 0$.